Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **19. 12. 2020**

■1 □2 □3 □4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Feldern ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Gruppe:

□0	□0
□1	□1
□2	□2
□3	□3
□4	□4
□5	□5
□6	□6
□7	□7
□8	□8
□9	□9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv $F_1 := 1, F_2 := 1$ sowie $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 2$.
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$: Es gilt $\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$.

IA Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\quad F_1^2 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_{1+1}$.

IS Induktionsschluss:

$n \to n+1$

IH: Die Aussage sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte $\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$.

Dann folgt $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} F_j^2 = \sum_{j=1}^{n} F_j^2 + F_{n+1}^2 \overset{\text{IH}}{=} F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 =$

$$= F_{n+1}\left(F_n + F_{n+1}\right) \overset{\text{Def.}}{=} F_{n+1} \cdot F_{(n+1)+1}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Seien die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 2+2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2 \\ 1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie von A und B jeweils den Rang: $\quad \mathrm{Rg}(A) = \boxed{2}, \quad \mathrm{Rg}(B) = \boxed{1}$.

(b) Bestimmen Sie für die Spalten von A eine nicht triviale Darstellung der Null:

$$\boxed{\left(-\frac{5}{2}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \boxed{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie für $(2\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, 1)^\intercal$, $(2+4\mathrm{i}, 3+\mathrm{i}, 2-\mathrm{i})^\intercal$ eine nicht triviale Darstellung der Null:

$$\boxed{(2-\mathrm{i})} \cdot \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 2+4\mathrm{i} \\ 3+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Sei $M\colon m_1, m_2, m_3$ die Basis des Vektorraums $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ mit $m_1(X) := 1$, $m_2(X) := X$, $m_3(X) := X^2$.
Gegeben seien zudem das Polynom $q(X) := -2X^2 + 7X - 3$, sowie die lineare Abbildung

$$f\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}\colon\ p(X) \mapsto p(3X-5).$$

(a) Berechnen Sie $f(q(X))$ und ${}_M f_M$:

$$f(q(X)) = \boxed{-18X^2 + 81X - 88}, \qquad {}_M f_M = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die inverse Abbildung $f^{-1}\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$:

$$f^{-1}\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}\colon\ p(X) \mapsto p\big(\tfrac{1}{3}(X+5)\big).$$

Aufgabe 5 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

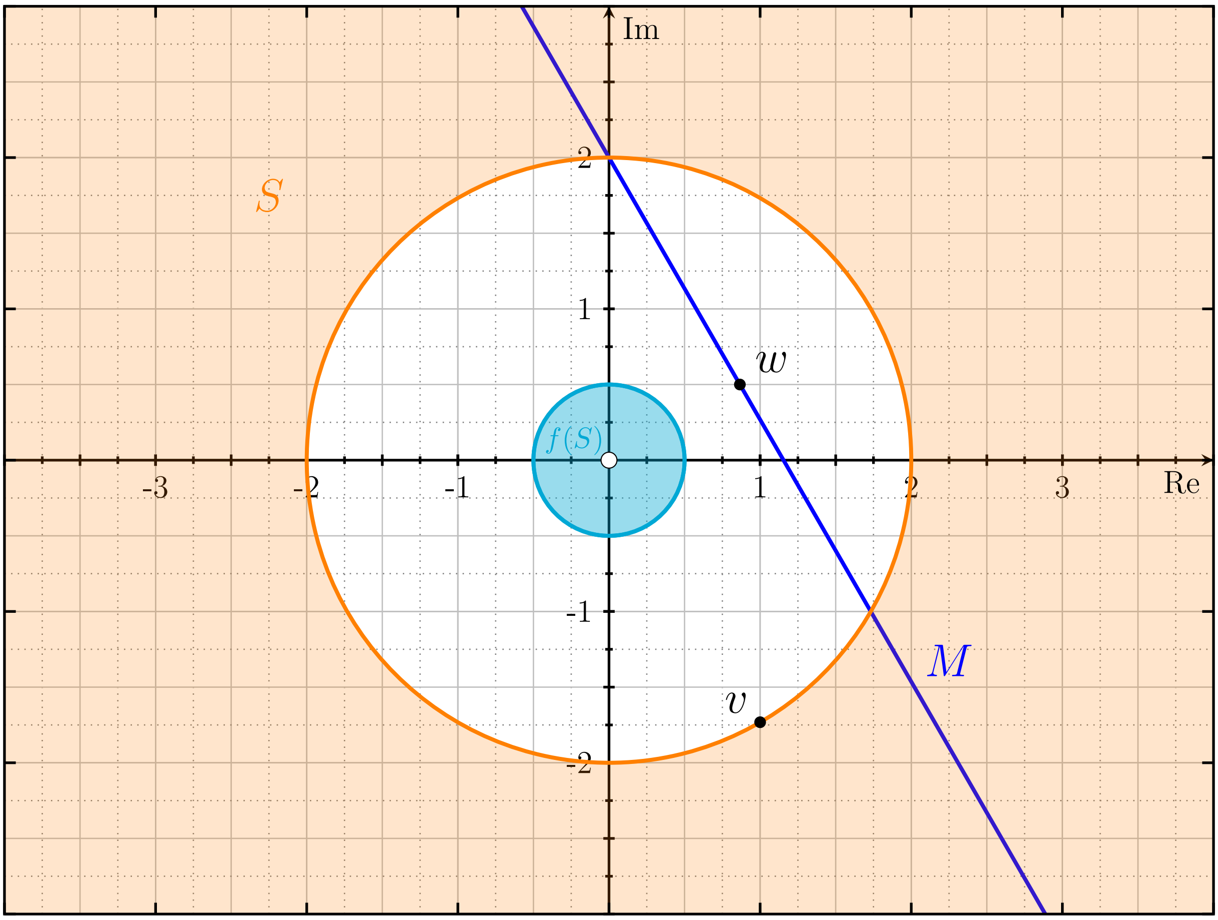
Gegeben seien $v := 1 - \sqrt{3} \cdot \mathrm{i}$ und $w := \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i}$.

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung von v und w:

$$v = \boxed{2 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)}, \qquad w = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$: $|v - \lambda w| = \boxed{\sqrt{\lambda^2 + 4}}$.

(c) Gegeben seien die Mengen $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\,(z\bar{w}) = 1 \right\}$ und $S := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \geqq 2 \right\}$.
Skizzieren Sie v, w, M, S sowie das Bild von S unter der Abbildung
$f \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon z \mapsto 1/\bar{z}$ in das folgende Koordinatensystem.



$\square 0 \quad \square 1 \quad \square 2 \quad \blacksquare 3$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\det(A)$ und A^{-1} und außerdem $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $A^2X = AB$ gilt:

$$\det(A) = \boxed{-12}, \qquad A^{-1} = \boxed{-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}, \qquad X = \boxed{\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$\square 0 \quad \square 1 \quad \square 2 \quad \square 3 \quad \square 4 \quad \blacksquare 5$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Für $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ seien $v_\alpha := \begin{pmatrix} 4 \\ 5\alpha \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_\gamma := \begin{pmatrix} 5 \\ \gamma \\ 7 \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 10 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ und $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$:

$$\mathcal{L} = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $v_\alpha \notin \operatorname{Kern}(f)$: $\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{6}{5}\}}$.

(c) Bestimmen Sie alle $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $b_\gamma \in \operatorname{Bild}(f)$: $\boxed{\gamma = 2}$.

$\square 0 \quad \square 1 \quad \square 2 \quad \blacksquare 3$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Gerade $g\colon x = P + \lambda v;\ \lambda \in \mathbb{R}$, und die Ebene E, wobei

$$P := \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -18\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E: $\left\langle \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{6}$.

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E: $S = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}}$.