Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A\, x + 2\, a^\intercal x + c = 0\}$.

(a) Seien $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = -2$.

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F mit $D = F^\intercal A\, F$.

$D =$ ☐ $\qquad F =$ ☐

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q: ☐

(b) Seien $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$, $c = 45$.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform annimmt.

Euklidische Normalform: ☐ $\qquad$ Koordinatensystem: ☐

Aufgabe 9 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Wir betrachten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ und ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^3$. Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 16 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an und bestimmen Sie $_{\mathbb{E}}P$:

$$\mathbb{F} = \big(\ \square\ ;\ \square,\ \square,\ \square\ \big), \qquad {}_{\mathbb{E}}P = \square\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\quad v \mapsto \square\, v + \square\,.$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **5. 2. 2022**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & -4+2\mathrm{i} & -3-\mathrm{i} \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie: $\det(A) = \square$, $\det(\mathrm{i} \cdot A) = \square$.

(b) Entwickeln Sie die Determinante von B nach der 3. Zeile

$$\det(B) = \square \cdot \det\left(\square\right) + \square \cdot \det\left(\square\right) + \square \cdot \det\left(\square\right)$$

und berechnen Sie $\det(B) = \square$.

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$. Geben Sie das charakteristische Polynom von A als Produkt von Linearfaktoren an: $\chi_A(\lambda) = \square$.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte μ sowie die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten d_μ von $B = \begin{pmatrix} 42 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 42 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$:

μ	
d_μ	

(c) Gegeben sei die reelle Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{Sp} C = 3$, welche den Eigenwert $\lambda_1 = 1 - \mathrm{i}$ und die weiteren Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ besitzt. Bestimmen Sie λ_2 und λ_3:

$\lambda_2 = \square$, $\lambda_3 = \square$.

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^4$.
Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $F\colon f_1, f_2$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$:

$f_1 = \square$, $f_2 = \square$.

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Fixpunktmenge $F_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = x\}$:

$F_\varphi = \square$.

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

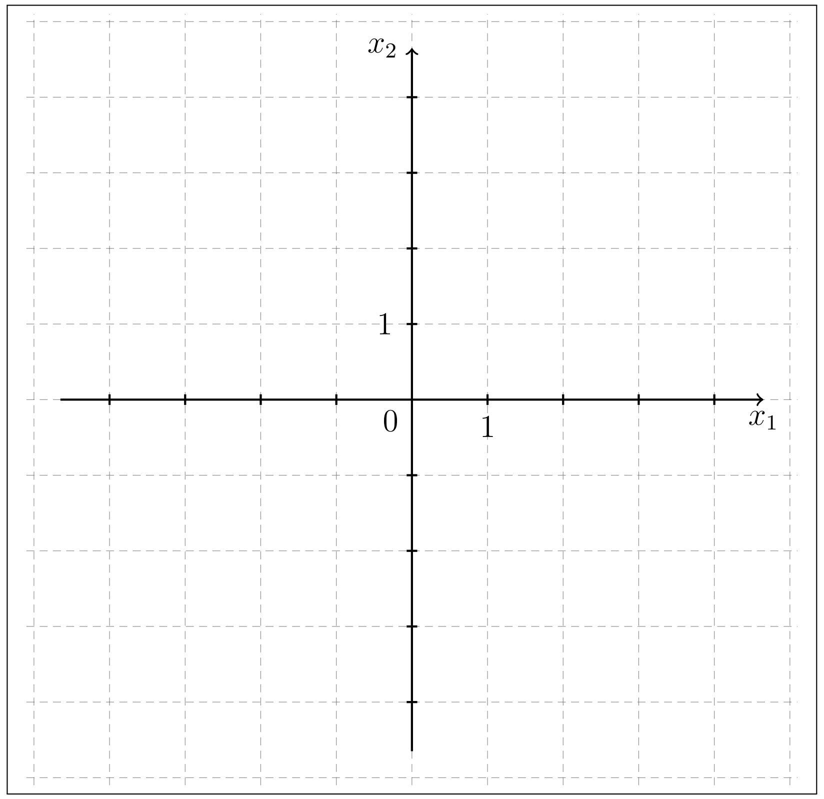
Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch

$$2\sqrt{2}\, y_1^2 + 2\, y_2 = 0\,.$$

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$, sowie die Quadrik Q in das Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben sei das zweischalige Hyperboloid $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 10x_1^2 + 20x_2^2 - 7x_3^2 + 1 = 0\right\}$ und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$.
Bestimmen Sie jeweils alle $d \in \mathbb{R}$ so, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die angegebene Gestalt hat.

(a) Genau ein Punkt: $d \in \square$

(b) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = \sqrt{2}$ und $h_2 = 1$: $d \in \square$

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A\, x + 2\, a^\intercal x + c = 0\}$.

(a) Seien $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = -2$.

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F mit $D = F^\intercal A\, F$.

$D =$ ☐ $F =$ ☐

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q: ☐

(b) Seien $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c = 36$.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform annimmt.

Euklidische Normalform:	Koordinatensystem:

Aufgabe 9 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Wir betrachten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ und ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^3$. Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad _{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an und bestimmen Sie $_{\mathbb{E}}P$:

$$\mathbb{F} = \left(\boxed{} ; \boxed{}, \boxed{}, \boxed{} \right), \qquad _{\mathbb{E}}P = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\quad v \mapsto \boxed{}\, v + \boxed{}.$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **5. 2. 2022**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 0 & 6+\mathrm{i} & 0 \\ 2 & -2+5\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie: $\det(A) = \boxed{}$, $\det(\mathrm{i} \cdot A) = \boxed{}$.

(b) Entwickeln Sie die Determinante von B nach der 1. Spalte

$$\det(B) = \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

und berechnen Sie $\det(B) = \boxed{}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$. Geben Sie das charakteristische Polynom von A als Produkt von Linearfaktoren an: $\chi_A(\lambda) = \boxed{}$.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte μ sowie die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten d_μ von $B = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 17 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$:

μ	
d_μ	

(c) Gegeben sei die reelle Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{Sp} C = 3$, welche den Eigenwert $\lambda_1 = 2 + \mathrm{i}$ und die weiteren Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ besitzt. Bestimmen Sie λ_2 und λ_3:

$\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^\intercal$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^4$.
Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $F\colon f_1, f_2$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$:

$f_1 = \boxed{}$, $f_2 = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Fixpunktmenge $F_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = x\}$:

$F_\varphi = \boxed{}$.

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

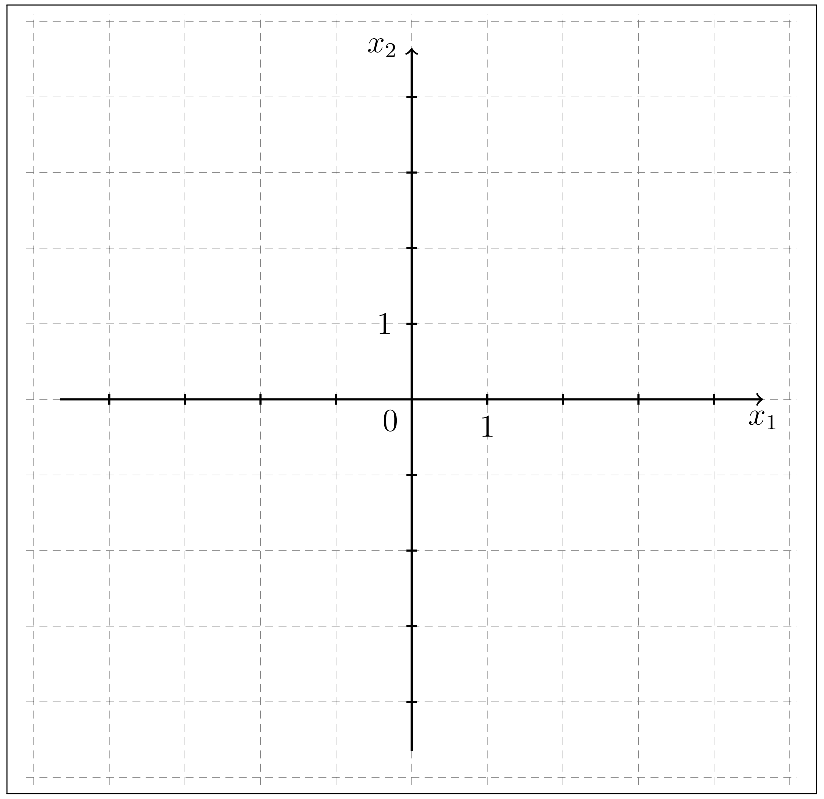
Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch

$$2\sqrt{2}\, y_1^2 + 2\, y_2 = 0\,.$$

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$, sowie die Quadrik Q in das Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben sei das zweischalige Hyperboloid $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1^2 + 9x_2^2 - 5x_3^2 + 1 = 0 \right\}$
und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$.
Bestimmen Sie jeweils alle $d \in \mathbb{R}$ so, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die angegebene Gestalt hat.

(a) Genau ein Punkt: $d \in \boxed{}$

(b) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = \sqrt{3}$ und $h_2 = 1$: $d \in \boxed{}$

Aufgabe 8 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A\, x + 2\, a^\intercal x + c = 0\}$.

(a) Seien $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = -2$.

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F mit $D = F^\intercal A\, F$.

$D =$ ☐ $F =$ ☐

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q: ☐

(b) Seien $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$, $c = 28$.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform annimmt.

Euklidische Normalform: ☐ Koordinatensystem: ☐

Aufgabe 9 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Wir betrachten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ und ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^3$. Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -21 \end{pmatrix}. $$

(a) Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an und bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}P$:

$\mathbb{F} = \big(☐\, ; ☐\, , ☐\, , ☐ \big)$, ${}_{\mathbb{E}}P =$ ☐ .

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon\quad v \mapsto$ ☐ $v +$ ☐ .

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **5. 2. 2022**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3-4\mathrm{i} & 2-3\mathrm{i} & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie: $\det(A) = \boxed{}$, $\det(\mathrm{i} \cdot A) = \boxed{}$.

(b) Entwickeln Sie die Determinante von B nach der 1. Zeile

$$\det(B) = \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right) + \boxed{} \cdot \det\left(\boxed{}\right)$$

und berechnen Sie $\det(B) = \boxed{}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$. Geben Sie das charakteristische Polynom von A als Produkt von Linearfaktoren an: $\chi_A(\lambda) = \boxed{}$.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte μ sowie die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten d_μ von $B = \begin{pmatrix} 27 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 27 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$:

μ	
d_μ	

(c) Gegeben sei die reelle Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{Sp} C = -4$, welche den Eigenwert $\lambda_1 = -1 + \mathrm{i}$ und die weiteren Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ besitzt. Bestimmen Sie λ_2 und λ_3:

$\lambda_2 = \boxed{}$, $\lambda_3 = \boxed{}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\intercal$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^4$.
Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $F\colon f_1, f_2$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$:

$f_1 = \boxed{}$, $f_2 = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Fixpunktmenge $F_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = x\}$:

$F_\varphi = \boxed{}$.

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

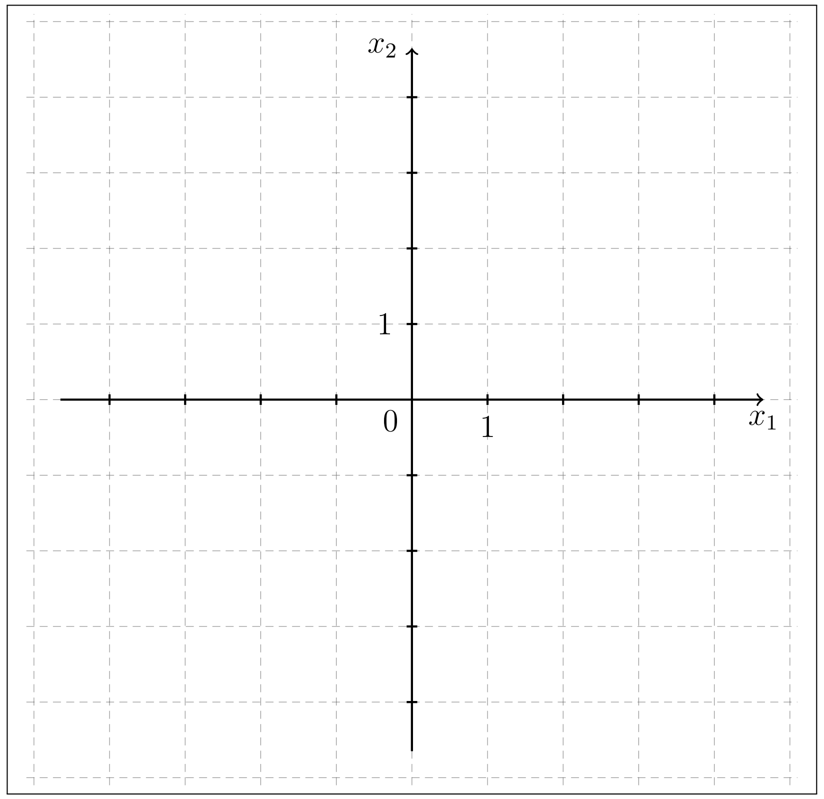
Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch

$$\sqrt{2}\, y_1^2 + 2\, y_2 = 0\,.$$

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$, sowie die Quadrik Q in das Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben sei das zweischalige Hyperboloid $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 10x_1^2 + 20x_2^2 - 3x_3^2 + 1 = 0\right\}$ und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$.
Bestimmen Sie jeweils alle $d \in \mathbb{R}$ so, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die angegebene Gestalt hat.

(a) Genau ein Punkt: $d \in \boxed{}$

(b) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = \sqrt{2}$ und $h_2 = 1$: $d \in \boxed{}$

Aufgabe 8 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A\,x + 2\,a^\intercal x + c = 0\}$.

(a) Seien $A = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = -2$.

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix F mit $D = F^\intercal A\,F$.

$D =$ $F =$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q:

(b) Seien $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \end{pmatrix}$, $c = 24$.

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform annimmt.

Euklidische Normalform: Koordinatensystem:

Aufgabe 9 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Wir betrachten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ und ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^3$. Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\quad v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an und bestimmen Sie $_{\mathbb{E}}P$:

$$\mathbb{F} = \left(\quad ; \quad , \quad , \quad \right), \qquad {}_{\mathbb{E}}P = \quad .$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$$_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\quad v \mapsto \quad v + \quad .$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **5. 2. 2022**

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -3-7\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1+5\mathrm{i} & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie: $\det(A) = \square$, $\det(\mathrm{i} \cdot A) = \square$.

(b) Entwickeln Sie die Determinante von B nach der 3. Spalte

$$\det(B) = \square \cdot \det\left(\square\right) + \square \cdot \det\left(\square\right) + \square \cdot \det\left(\square\right)$$

und berechnen Sie $\det(B) = \square$.

Aufgabe 3 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Geben Sie das charakteristische Polynom von A als Produkt von Linearfaktoren an: $\chi_A(\lambda) = \square$.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte μ sowie die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten d_μ von $B = \begin{pmatrix} 96 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 96 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 96 \end{pmatrix}$:

μ	
d_μ	

(c) Gegeben sei die reelle Matrix $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{Sp} C = 4$, welche den Eigenwert $\lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ und die weiteren Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ besitzt. Bestimmen Sie λ_2 und λ_3:

$\lambda_2 = \square$, $\lambda_3 = \square$.

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^\intercal$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^\intercal \in \mathbb{R}^4$.
Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $F\colon f_1, f_2$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$:

$f_1 = \square$, $f_2 = \square$.

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Fixpunktmenge $F_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = x\}$:

$F_\varphi = \square$.

Aufgabe 6 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

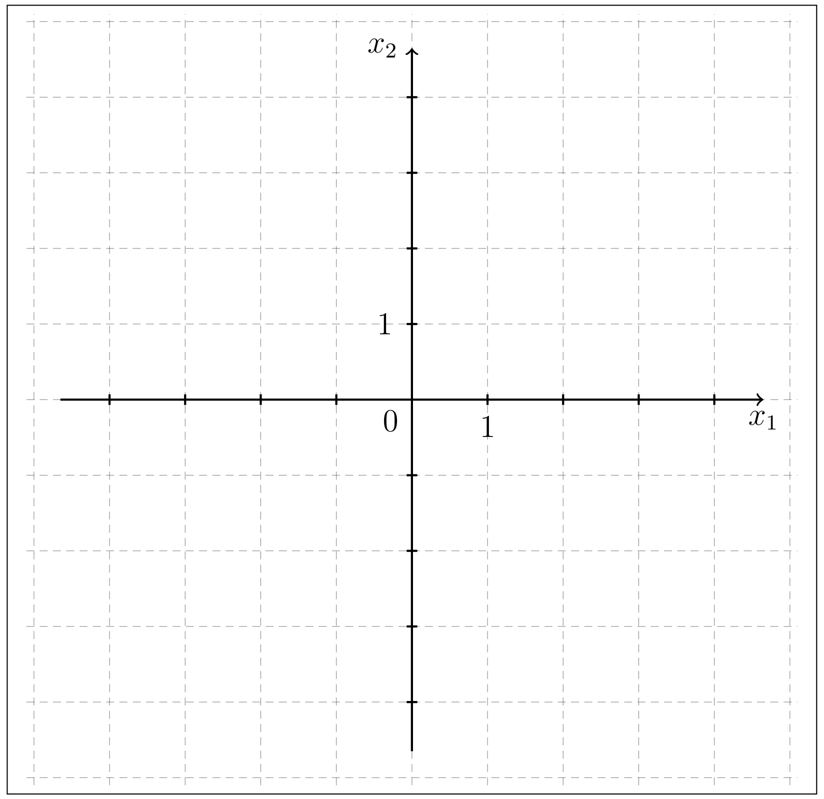
Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch

$$\sqrt{2}\, y_1^2 + 2\, y_2 = 0\,.$$

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$, sowie die Quadrik Q in das Standardkoordinatensystem.



Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Gegeben sei das zweischalige Hyperboloid $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x_1^2 + 9x_2^2 - 2x_3^2 + 1 = 0 \right\}$ und die vom Parameter $d \in \mathbb{R}$ abhängige Ebene $E_d = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = d\}$.
Bestimmen Sie jeweils alle $d \in \mathbb{R}$ so, dass der Schnitt $Q \cap E_d$ die angegebene Gestalt hat.

(a) Genau ein Punkt: $d \in \square$

(b) Eine Ellipse mit den Halbachsen $h_1 = \sqrt{3}$ und $h_2 = 1$: $d \in \square$