Aufgabe 7 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Wir betrachten die Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A\, x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \pi.$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(A)$, die erweiterte Matrix A_{erw}, sowie $\mathrm{Rg}(A_{\mathrm{erw}})$:

$\mathrm{Rg}(A) = \square$, $\quad A_{\mathrm{erw}} = \square$, $\quad \mathrm{Rg}(A_{\mathrm{erw}}) = \square$.

(b) Welchen Typ hat die Quadrik Q?

kegelige Quadrik ☐ Mittelpunktsquadrik ☐ parabolische Quadrik ☐

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

In Koordinaten bezüglich $\mathbb{G} = \left(\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ sei die Quadrik Q beschrieben durch die Gleichung

$$5z_1^2 - \sqrt{10}\, z_2 + 3 = 0\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q, sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem Q diese Normalform annimmt.

Euklidische Normalform: $\square$ Koordinatensystem: $\square$

(b) Welche Gestalt besitzt die Quadrik $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 5x_1^2 - \sqrt{10}\, x_2 + 3 = 0 \right\}$ in $\mathbb{R}^3$?

$\square$

Aufgabe 9 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\quad \mathrm{Sp}(A) = \square$, $\quad \det(A) = \square$, $\quad \det(B) = \square$.

Nachklausur **Höhere Mathematik 1** **18. 2. 2022**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon x \mapsto Ax$.

(a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume von A:

λ	$V(\lambda)$

(b) Kreuzen Sie alle auf φ zutreffenden Eigenschaften an:

Injektivität	Surjektivität	Bijektivität	Isometrie
☐	☐	☐	☐

(c) Da φ linear ist, ist die Fixpunktmenge $F = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(x) = x\}$ ein Vektorraum.

Bestimmen Sie $\dim F$: $\dim F =$ ☐

Aufgabe 3 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Wir betrachten das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ und ein weiteres affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^3$. Zudem seien die Punkte P_0, P_1, P_2 und P_3 aus $\mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$_{\mathbb{E}}P_0 = (3,1,5)^{\intercal},\ _{\mathbb{E}}P_1 = (0,1,6)^{\intercal},\ _{\mathbb{E}}P_2 = (3,3,0)^{\intercal},\ _{\mathbb{E}}P_3 = (4,1,1)^{\intercal}$$

und

$$_{\mathbb{F}}P_0 = (0,0,0)^{\intercal},\ _{\mathbb{F}}P_1 = (1,0,0)^{\intercal},\ _{\mathbb{F}}P_2 = (0,1,0)^{\intercal},\ _{\mathbb{F}}P_3 = (0,0,1)^{\intercal}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$$_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon\quad v \mapsto \boxed{}\, v + \boxed{}\,.$$

Aufgabe 4 (1 Punkte) ☐0 ☐1

Von den Vektoren $z_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $z_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ wird ein Parallelogramm aufgespannt.

Bestimmen Sie die orientierte Fläche F: $F = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sei die Drehung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -8 & -4 & -1 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Kosinus des Drehwinkels α: $\cos(\alpha) = \boxed{}$.

(b) Betrachten Sie nun die verschobene Drehung $\mu\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \varphi(x) + b$ mit $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Drehachse R: $R = \boxed{}$.

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Berechnen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{6^n} = \boxed{}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{6n} = \boxed{}.$$

(b) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Für welche Werte von γ ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(\frac{3}{8} - \gamma\right)^n$ konvergent?

☐

(c) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \left(3 + \frac{5}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$.

☐