Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/5	/3	/3	/2	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und den Buchstaben Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird und α keine Affinität ist.

$a =$ ☐ , $b =$ ☐ , $c =$ ☐ , $d =$ ☐ , $e =$ ☐ .

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon p \mapsto f(p) = (2p(0), 3p'(0))^\intercal\,,$$

die Basis $B\colon 1, X-2, 2-X-2X^2$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ sowie die Basis $D\colon (1,-2)^\intercal, (1,-3)^\intercal$ und die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_D$ und ${}_D\mathrm{id}_E$ an.

$${}_E\mathrm{id}_D = \boxed{}\,, \qquad {}_D\mathrm{id}_E = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_E f_B$ und ${}_D f_B$.

$${}_E f_B = \boxed{}\,, \qquad {}_D f_B = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = (6,3,0), \quad Q = (7,5,2), \quad R = (7,3,1).$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E\colon\ x = \boxed{} + \lambda \boxed{} + \mu \boxed{}\,, \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x\rangle = d\} \quad \text{mit} \quad n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}\,.$$

(c) Sei g die Gerade durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$, die E orthogonal schneidet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E:

$$S = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3 = 0 \right\}.$$

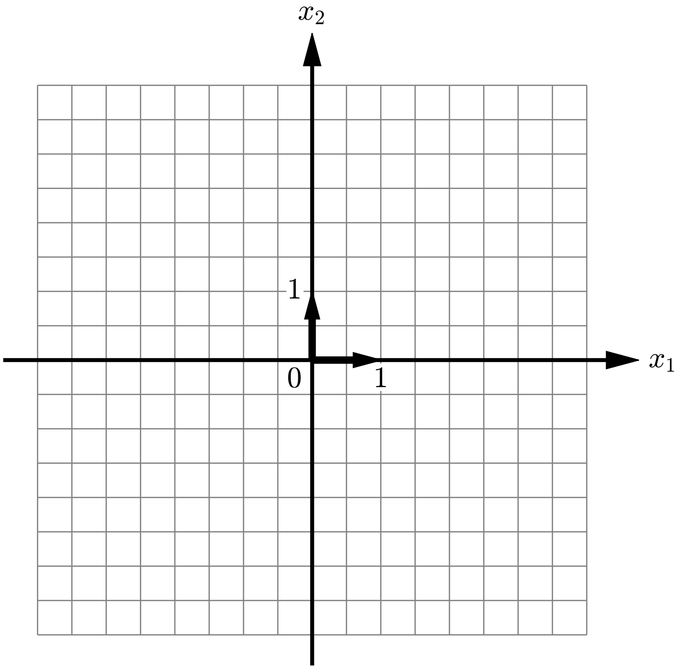
(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie die Gestalt von Q.

Euklidische Normalform: $\boxed{}$, Gestalt: $\boxed{}$

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt, sowie die zugehörige Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ als eigentliche Isometrie.

$\mathbb{F} = \boxed{}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{}\, v + \boxed{}$

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{F}$ und die Quadrik Q im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(S)$ des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$.

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{}$, $\mathcal{L}(S) = \boxed{}$.

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) In $\mathbb{R}^4$ sind die Basis B und die Vektoren v, w gegeben durch

$$B\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren

$${}_Bv = \boxed{}, \qquad {}_Bw = \boxed{}, \qquad {}_B(v+w) = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$10\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{3^{k+1}} = \boxed{}, \qquad 30\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{3^{k+1}} = \boxed{}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$ ist. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3 von A?

$$\alpha = \boxed{}, \qquad \beta = \boxed{}, \qquad \lambda_3 = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft

$$T^{\mathsf{T}}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \qquad T = \boxed{}.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/5	/3	/3	/2	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und den Buchstaben Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Übungsgruppe:** ☐

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird und α keine Affinität ist.

$a =$ ☐ , $b =$ ☐ , $c =$ ☐ , $d =$ ☐ , $e =$ ☐ .

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto f(p) = (2p(0), 3p'(0))^\intercal\,,$$

die Basis $B\colon 1, X-2, 2-X-2X^2$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ sowie die Basis $D\colon (-1,2)^\intercal, (1,-3)^\intercal$ und die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_D$ und ${}_D\mathrm{id}_E$ an.

$${}_E\mathrm{id}_D = \boxed{}\,, \qquad {}_D\mathrm{id}_E = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_Ef_B$ und ${}_Df_B$.

$${}_Ef_B = \boxed{}\,, \qquad {}_Df_B = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = (9,0,6), \quad Q = (10,1,6), \quad R = (10,2,8).$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E\colon\ x = \boxed{} + \lambda \boxed{} + \mu \boxed{}\,, \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x \rangle = d\} \quad \text{mit} \quad n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}\,.$$

(c) Sei g die Gerade durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$, die E orthogonal schneidet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E:

$$S = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 + 2x_2 + 3 = 0 \right\} .$$

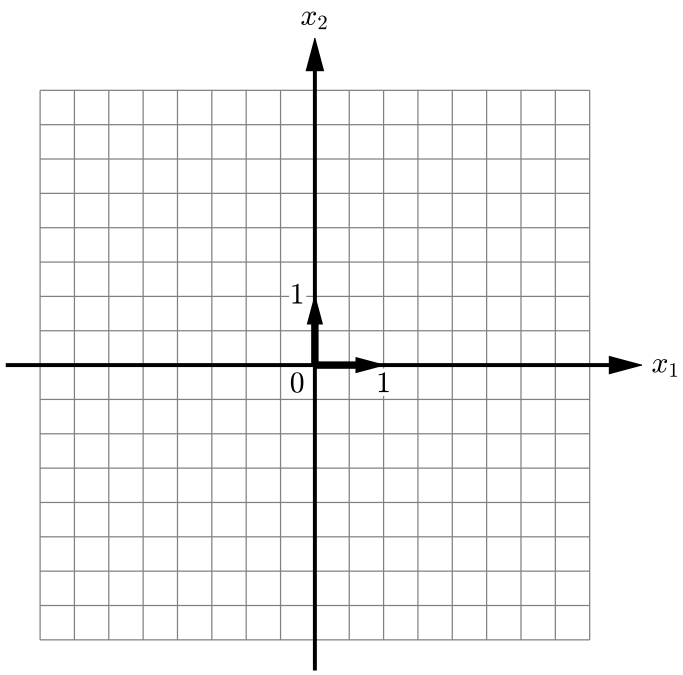
(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie die Gestalt von Q.

Euklidische Normalform: $\boxed{}$, Gestalt: $\boxed{}$

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt, sowie die zugehörige Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ als eigentliche Isometrie.

$\mathbb{F} = \boxed{}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{}\, v + \boxed{}$

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{F}$ und die Quadrik Q im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(S)$ des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$.

$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{}$, $\mathcal{L}(S) = \boxed{}$.

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) In $\mathbb{R}^4$ sind die Basis B und die Vektoren v, w gegeben durch

$$B\colon \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren

$${}_Bv = \boxed{}, \qquad {}_Bw = \boxed{}, \qquad {}_B(v+w) = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$10 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(-2)^{k+1}} = \boxed{}, \qquad 30 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(-2)^{k+1}} = \boxed{}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$ ist. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3 von A?

$$\alpha = \boxed{}, \qquad \beta = \boxed{}, \qquad \lambda_3 = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft

$$T^{\mathsf{T}} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \qquad T = \boxed{}.$$

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Studien-gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/5	/3	/3	/2	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und den Buchstaben Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird und α keine Affinität ist.

$a =$ ____ , $b =$ ____ , $c =$ ____ , $d =$ ____ , $e =$ ____ .

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_2\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon p \mapsto f(p) = (2p(0), 3p'(0))^\intercal\,,$$

die Basis $B\colon 1, X-2, 2-X-2X^2$ von $\operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$ sowie die Basis $D\colon (1,-2)^\intercal, (-1,3)^\intercal$ und die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_D$ und ${}_D\mathrm{id}_E$ an.

$${}_E\mathrm{id}_D = \boxed{}\,, \qquad {}_D\mathrm{id}_E = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_Ef_B$ und ${}_Df_B$.

$${}_Ef_B = \boxed{}\,, \qquad {}_Df_B = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = (0,2,5), \quad Q = (1,2,6), \quad R = (2,4,6).$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E\colon\ x = \boxed{} + \lambda \boxed{} + \mu \boxed{}\,, \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x\rangle = d\} \quad \text{mit} \quad n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}\,.$$

(c) Sei g die Gerade durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$, die E orthogonal schneidet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E:

$$S = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 3 = 0 \right\} .$$

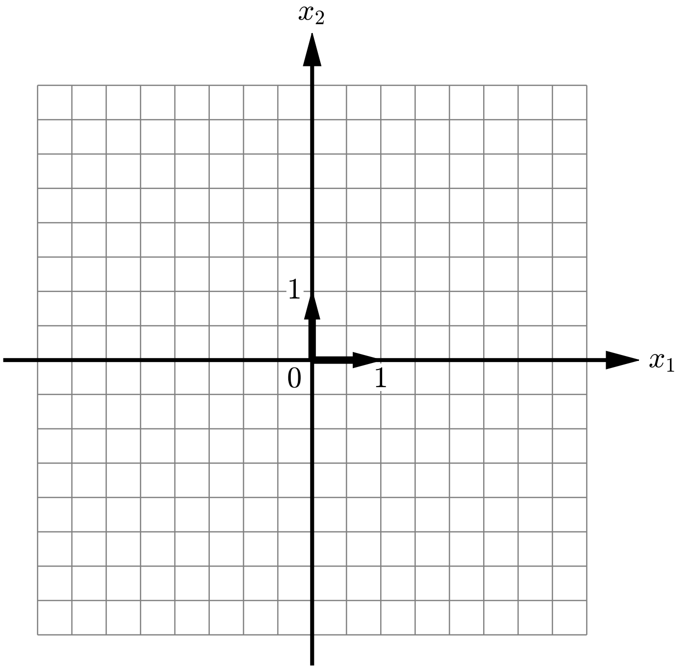
(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie die Gestalt von Q.

Euklidische Normalform: $\boxed{\qquad\qquad}$, Gestalt: $\boxed{\qquad\qquad}$

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt, sowie die zugehörige Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ als eigentliche Isometrie.

$$\mathbb{F} = \boxed{\qquad\qquad} \, , \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\qquad} \, v + \boxed{\qquad}$$

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{F}$ und die Quadrik Q im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(S)$ des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$.

$$\operatorname{Rg}(A) = \boxed{\qquad} \, , \qquad \mathcal{L}(S) = \boxed{\qquad\qquad\qquad} \, .$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) In $\mathbb{R}^4$ sind die Basis B und die Vektoren v, w gegeben durch

$$B\colon \begin{pmatrix} 0\\3\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\0\\0\\2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-6 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4\\9\\3\\2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren

$${}_B v = \boxed{}, \qquad {}_B w = \boxed{}, \qquad {}_B(v+w) = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$10 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(-3)^{k+1}} = \boxed{}, \qquad 30 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(-3)^{k+1}} = \boxed{}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2\\1\\\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1\\\beta\\-\beta \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$ ist. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3 von A?

$$\alpha = \boxed{}, \qquad \beta = \boxed{}, \qquad \lambda_3 = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft

$$T^{\mathsf{T}} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \qquad T = \boxed{}.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/5	/3	/3	/2	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und den Buchstaben Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Übungsgruppe:** ☐

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird und α keine Affinität ist.

$a =$ ☐ , $b =$ ☐ , $c =$ ☐ , $d =$ ☐ , $e =$ ☐ .

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon p \mapsto f(p) = (2p(0), 3p'(0))^\intercal ,$$

die Basis $B\colon 1, X-2, 2-X-2X^2$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ sowie die Basis $D\colon (-1,2)^\intercal, (-1,3)^\intercal$ und die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_D$ und ${}_D\mathrm{id}_E$ an.

$${}_E\mathrm{id}_D = \boxed{}, \qquad {}_D\mathrm{id}_E = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_Ef_B$ und ${}_Df_B$.

$${}_Ef_B = \boxed{}, \qquad {}_Df_B = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = (3,9,0), \quad Q = (3,10,1), \quad R = (5,10,2).$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E\colon\ x = \boxed{} + \lambda \boxed{} + \mu \boxed{}, \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x\rangle = d\} \quad \text{mit} \quad n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}.$$

(c) Sei g die Gerade durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$, die E orthogonal schneidet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E:

$$S = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 3 = 0 \right\}.$$

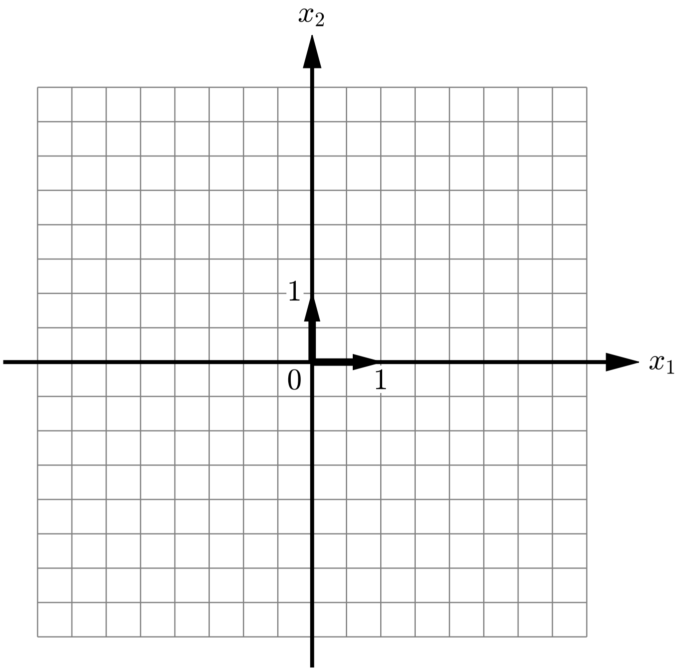
(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie die Gestalt von Q.

Euklidische Normalform: $\boxed{\qquad\qquad}$, Gestalt: $\boxed{\qquad\qquad}$

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt, sowie die zugehörige Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ als eigentliche Isometrie.

$$\mathbb{F} = \boxed{\qquad\qquad}\,, \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\qquad}\, v + \boxed{\qquad}$$

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{F}$ und die Quadrik Q im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(S)$ des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$.

$$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{\qquad}\,, \qquad \mathcal{L}(S) = \boxed{\qquad\qquad\qquad}\,.$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) In $\mathbb{R}^4$ sind die Basis B und die Vektoren v, w gegeben durch

$$B\colon \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren

$$_B v = \boxed{}, \qquad _B w = \boxed{}, \qquad _B (v+w) = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$10\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{2^{k+1}} = \boxed{}, \qquad 30\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{2^{k+1}} = \boxed{}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -5$ ist. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3 von A?

$$\alpha = \boxed{}, \qquad \beta = \boxed{}, \qquad \lambda_3 = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft

$$T^{\mathsf{T}} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \qquad T = \boxed{}.$$
