Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/5	/3	/3	/2	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und den Buchstaben Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird und α keine Affinität ist.

$a = \boxed{-2}$, $b = \boxed{-4}$, $c = \boxed{1}$, $d = \boxed{1}$, $e = \boxed{-5}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto f(p) = (2p(0), 3p'(0))^{\intercal}\,,$$

die Basis $B\colon 1, X-2, 2-X-2X^2$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ sowie die Basis $D\colon (1,-2)^{\intercal}, (1,-3)^{\intercal}$ und die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_D$ und ${}_D\mathrm{id}_E$ an.

$${}_E\mathrm{id}_D = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}\,, \qquad {}_D\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_Ef_B$ und ${}_Df_B$.

$${}_Ef_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}}\,, \qquad {}_Df_B = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & -9 & 9 \\ -4 & 5 & -5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = (6,3,0), \quad Q = (7,5,2), \quad R = (7,3,1).$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E\colon\ x = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} + \mu \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,, \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x \rangle = d\} \quad \text{mit} \quad n = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad d = \boxed{5}\,.$$

(c) Sei g die Gerade durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$, die E orthogonal schneidet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E:

$$S = \boxed{\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right)}\,.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3 = 0 \right\}.$$

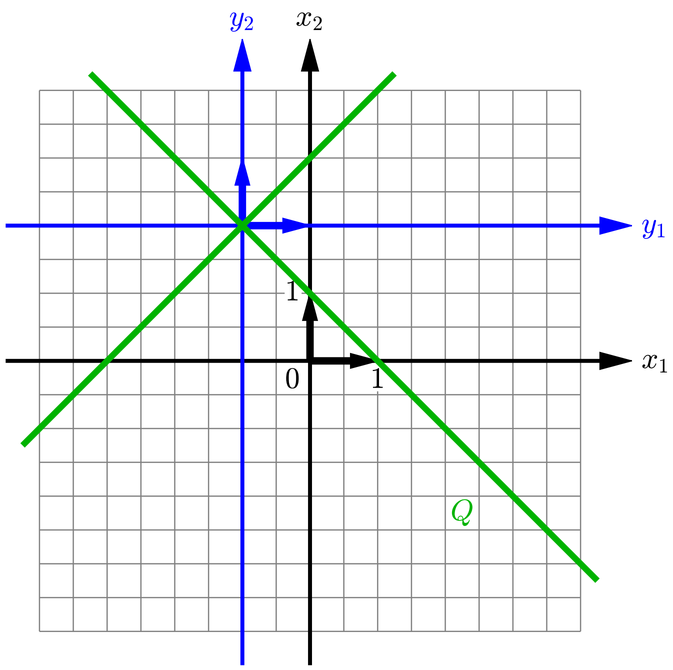
(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie die Gestalt von Q.

Euklidische Normalform: $\boxed{y_1^2 - y_2^2 = 0}$, Gestalt: $\boxed{\text{schneidendes Geradenpaar}}$

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt, sowie die zugehörige Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ als eigentliche Isometrie.

$$\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}, \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{F}$ und die Quadrik Q im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(S)$ des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$.

$$\operatorname{Rg}(A) = \boxed{4}, \qquad \mathcal{L}(S) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}.$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) In $\mathbb{R}^4$ sind die Basis B und die Vektoren v, w gegeben durch

$$B\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren

$${}_B v = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \qquad {}_B w = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad {}_B (v+w) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$10 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{3^{k+1}} = \boxed{3 - \mathrm{i}}, \qquad 30 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{3^{k+1}} = \boxed{-1 - 3\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$ ist. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3 von A?

$$\alpha = \boxed{-2}, \qquad \beta = \boxed{2}, \qquad \lambda_3 = \boxed{-5}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft

$$T^{\mathsf{T}} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \qquad T = \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/5	/3	/3	/2	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und den Buchstaben Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird und α keine Affinität ist.

$a = \boxed{-4}$, $b = \boxed{-8}$, $c = \boxed{1}$, $d = \boxed{-5}$, $e = \boxed{-2}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon p \mapsto f(p) = (2p(0), 3p'(0))^\intercal\,,$$

die Basis $B\colon 1, X-2, 2-X-2X^2$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ sowie die Basis $D\colon (-1,2)^\intercal, (1,-3)^\intercal$ und die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_D$ und ${}_D\mathrm{id}_E$ an.

$${}_E\mathrm{id}_D = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}\,, \qquad {}_D\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_E f_B$ und ${}_D f_B$.

$${}_E f_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}}\,, \qquad {}_D f_B = \boxed{\begin{pmatrix} -6 & 9 & -9 \\ -4 & 5 & -5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = (9,0,6), \quad Q = (10,1,6), \quad R = (10,2,8).$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E\colon\ x = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}} + \lambda \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \mu \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}\,, \qquad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x\rangle = d\} \quad \text{mit} \quad n = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad d = \boxed{8}\,.$$

(c) Sei g die Gerade durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$, die E orthogonal schneidet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E:

$$S = \boxed{\left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)}\,.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 + 2x_2 + 3 = 0 \right\} .$$

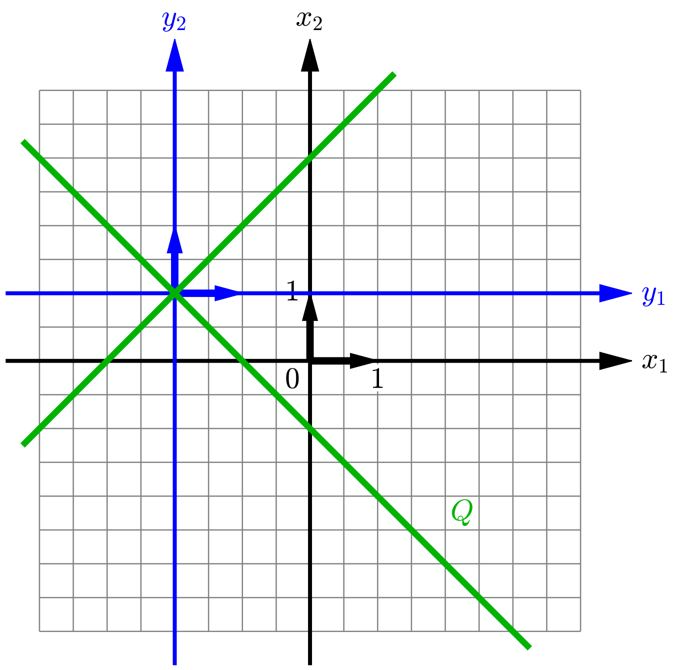
(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie die Gestalt von Q.

Euklidische Normalform: $\boxed{y_1^2 - y_2^2 = 0}$, Gestalt: $\boxed{\text{schneidendes Geradenpaar}}$

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt, sowie die zugehörige Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ als eigentliche Isometrie.

$$\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} , \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{F}$ und die Quadrik Q im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(S)$ des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$.

$$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{4} , \qquad \mathcal{L}(S) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}} .$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) In $\mathbb{R}^4$ sind die Basis B und die Vektoren v, w gegeben durch

$$B\colon \begin{pmatrix} 2\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\5\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0\\-2\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2\\1\\5\\6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren

$${}_Bv = \boxed{\begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}}, \qquad {}_Bw = \boxed{\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\2 \end{pmatrix}}, \qquad {}_B(v+w) = \boxed{\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$10\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(-2)^{k+1}} = \boxed{-4+2\mathrm{i}}, \qquad 30\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(-2)^{k+1}} = \boxed{3+6\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2\\2\\\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\beta\\1\\\beta \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$ ist. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3 von A?

$$\alpha = \boxed{-1}, \qquad \beta = \boxed{-2}, \qquad \lambda_3 = \boxed{2}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft

$$T^{\mathsf{T}}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \qquad T = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/5	/3	/3	/2	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und den Buchstaben Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird und α keine Affinität ist.

$a = \boxed{4}$, $b = \boxed{-8}$, $c = \boxed{-1}$, $d = \boxed{-1}$, $e = \boxed{5}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto f(p) = (2p(0), 3p'(0))^\intercal ,$$

die Basis $B\colon 1, X-2, 2-X-2X^2$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ sowie die Basis $D\colon (1,-2)^\intercal, (-1,3)^\intercal$ und die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_D$ und ${}_D\mathrm{id}_E$ an.

$${}_E\mathrm{id}_D = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}, \qquad {}_D\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_E f_B$ und ${}_D f_B$.

$${}_E f_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}}, \qquad {}_D f_B = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & -9 & 9 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = (0,2,5), \quad Q = (1,2,6), \quad R = (2,4,6).$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E\colon\ x = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}} + \lambda \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + \mu \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x \rangle = d\} \quad \text{mit} \quad n = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad d = \boxed{4}.$$

(c) Sei g die Gerade durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$, die E orthogonal schneidet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E:

$$S = \boxed{\left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)}.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 3 = 0 \right\}.$$

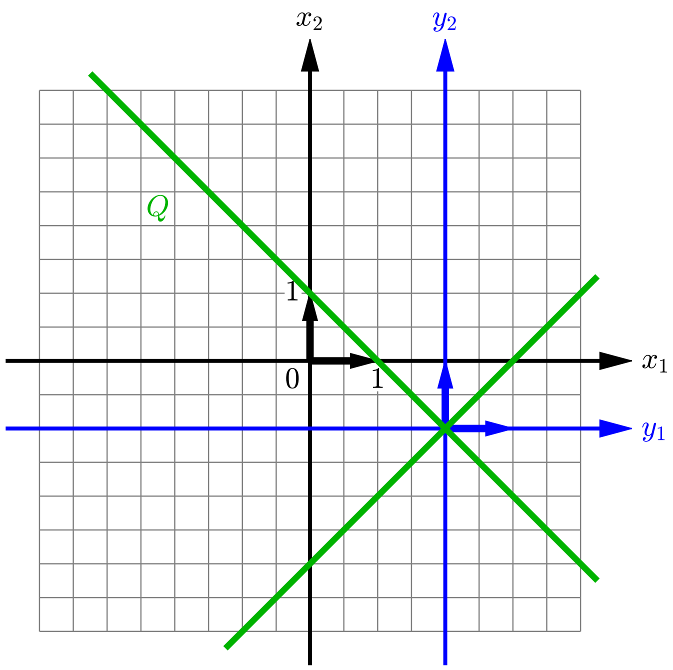
(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie die Gestalt von Q.

Euklidische Normalform: $\boxed{y_1^2 - y_2^2 = 0}$, Gestalt: $\boxed{\text{schneidendes Geradenpaar}}$

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt, sowie die zugehörige Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ als eigentliche Isometrie.

$$\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}, \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{F}$ und die Quadrik Q im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(S)$ des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$.

$$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{4}, \quad \mathcal{L}(S) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}.$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) In $\mathbb{R}^4$ sind die Basis B und die Vektoren v, w gegeben durch

$$B\colon \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren

$$_Bv = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad _Bw = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \qquad _B(v+w) = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$10\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(-3)^{k+1}} = \boxed{-3+\mathrm{i}}, \qquad 30\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{(-3)^{k+1}} = \boxed{1+3\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$ ist. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3 von A?

$$\alpha = \boxed{2}, \qquad \beta = \boxed{-2}, \qquad \lambda_3 = \boxed{-1}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft

$$T^{\mathsf{T}}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \qquad T = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/5	/5	/3	/3	/2	/5	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und den Buchstaben Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ______ **Übungsgruppe:** ______

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Gegeben ist die affine Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

mit Parametern $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Parameter so, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird und α keine Affinität ist.

$a = \boxed{-4}$, $b = \boxed{-4}$, $c = \boxed{2}$, $d = \boxed{2}$, $e = \boxed{-5}$.

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$f\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto f(p) = (2p(0), 3p'(0))^\intercal ,$$

die Basis $B\colon 1, X-2, 2-X-2X^2$ von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ sowie die Basis $D\colon (-1,2)^\intercal, (-1,3)^\intercal$ und die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E\mathrm{id}_D$ und ${}_D\mathrm{id}_E$ an.

$${}_E\mathrm{id}_D = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}, \qquad {}_D\mathrm{id}_E = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_E f_B$ und ${}_D f_B$.

$${}_E f_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}}, \qquad {}_D f_B = \boxed{\begin{pmatrix} -6 & 9 & -9 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = (3,9,0), \quad Q = (3,10,1), \quad R = (5,10,2).$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E\colon\ x = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \mu \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \,|\, x \rangle = d\} \quad \text{mit} \quad n = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad d = \boxed{7}.$$

(c) Sei g die Gerade durch den Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$, die E orthogonal schneidet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E:

$$S = \boxed{\left(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{14}{3}\right)}.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben ist im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 3 = 0 \right\}.$$

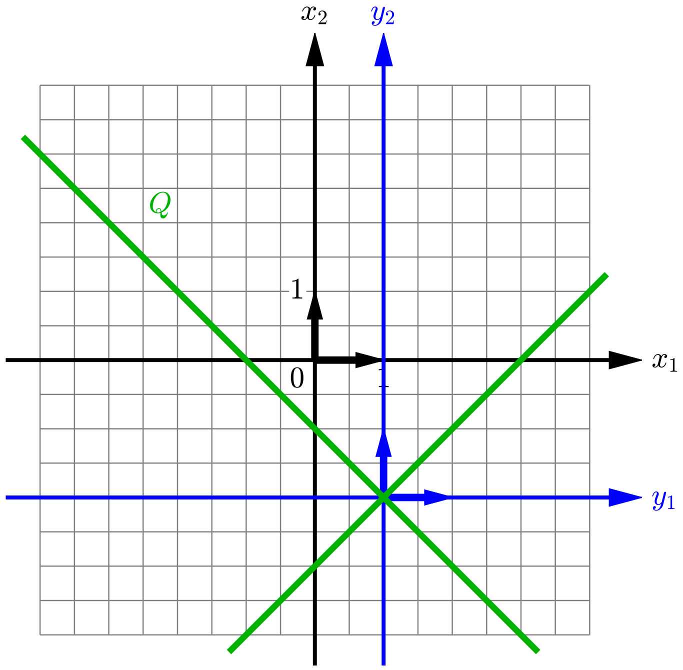
(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform sowie die Gestalt von Q.

Euklidische Normalform: $\boxed{y_1^2 - y_2^2 = 0}$, Gestalt: $\boxed{\text{schneidendes Geradenpaar}}$

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dessen Q euklidische Normalform besitzt, sowie die zugehörige Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ als eigentliche Isometrie.

$$\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}, \quad {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}(v) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} v + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{F}$ und die Quadrik Q im Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$.



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von A sowie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(S)$ des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$.

$$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{4}, \qquad \mathcal{L}(S) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}.$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) In $\mathbb{R}^4$ sind die Basis B und die Vektoren v, w gegeben durch

$$B\colon \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren

$${}_Bv = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad {}_Bw = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \qquad {}_B(v+w) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$10\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{2^{k+1}} = \boxed{4 - 2\mathrm{i}}, \qquad 30\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^k}{2^{k+1}} = \boxed{-3 - 6\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -5$ ist. Wie lautet der dritte Eigenwert λ_3 von A?

$$\alpha = \boxed{-2}, \qquad \beta = \boxed{-1}, \qquad \lambda_3 = \boxed{-2}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft

$$T^{\mathsf{T}}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}: \qquad T = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$
