Aufgabe 7 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z-6+\mathrm{i}}{m}\right)^m$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k}}{8^k}$	$\sum\limits_{m=2}^{\infty}(2z-2\mathrm{i})^m$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(5+3^k)z^k$
z_0	$6-\mathrm{i}$	0	i	0
ρ	$+\infty$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Aufgabe 8 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 - y, \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 - 4.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x, y und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben.

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ -1 + 4\lambda y &= 0 \\ x^2 + 2y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$. Geben Sie jeweils auch den Funktionswert und den Typ des Extremums an.

Extremstelle	Funktionswert	Typ
$(0, \sqrt{2})^\intercal$	$-\sqrt{2}$	(absolutes) Minimum
$(0, -\sqrt{2})^\intercal$	$\sqrt{2}$	(relatives) Minimum
$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{2}}, -\frac{1}{4}\right)^\intercal$	$\frac{33}{8}$	(absolutes) Maximum
$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{2}}, -\frac{1}{4}\right)^\intercal$	$\frac{33}{8}$	(absolutes) Maximum

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** 1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2x^3+1}{5x^3+2x^2-4}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{x^2+3x}}{x}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\tan(\pi-2x)}$
$-\frac{2}{5}$	$\sqrt{3}-1$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien das Vektorfeld f sowie die Parametrisierung C der Kurve K durch

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 3(x_3 - x_2^2 - x_1^2) \end{pmatrix}, \qquad C\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$f(C(t)) = \boxed{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 3(t-1) \end{pmatrix}}, \qquad C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}}$$

und das Kurvenintegral sowie die Länge L der Kurve K

$$\int_C f(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{3\pi^2}{8} - \pi}, \qquad L(K) = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{5x^2+8x+10}{(x+2)(x^2+3)} = \frac{\boxed{2}}{x+2} + \frac{\boxed{2} + \boxed{3} \cdot x}{x^2+3}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die gegeben ist durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos(2xy) - x^2 - y^2.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradient von f: $\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2y\sin(2xy) - 2x \\ -2x\sin(2xy) - 2y \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix:

$$\mathrm{H}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4y^2\cos(2xy) - 2 & -2(\sin(2xy) + 2xy\cos(2xy)) \\ -2(\sin(2xy) + 2xy\cos(2xy)) & -4x^2\cos(2xy) - 2 \end{pmatrix}}$$

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix}\right)$:

$$\boxed{1-\pi} + \boxed{0} \cdot x + \boxed{-2\sqrt{\pi}} \cdot (y - \sqrt{\pi}) + \boxed{(-2\pi-1)} \cdot x^2 + \boxed{0} \cdot x(y-\sqrt{\pi}) + \boxed{-1} \cdot (y-\sqrt{\pi})^2.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Berechnen Sie:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(3x-2)^2+1}}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(3x-2)\right]$$

$$\int \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \left[3x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = 3 - \frac{\ln(2)}{2}$$