



**Aufgabe 8** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben sei die Ebene  $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 4x_2 + 1 = 0\}$  sowie die von einem Parameter  $\delta \in \mathbb{R}$

abhängige Gerade  $g_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \delta \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ .

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von  $E$ :  $\left\langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5}$ .

(b) Für welchen Wert für  $\delta$  ist  $g_\delta$  parallel zu  $E$ ?  $\delta = \frac{4}{3}$

Bestimmen Sie in diesem Fall ferner den Abstand  $a$  der Geraden  $g_\delta$  und  $E$ :  $a = 5$

(c) Sei nun  $\delta = 3$ . Bestimmen Sie den Schnittpunkt  $S_3$  von  $E$  und  $g_3$  sowie den zugehörigen

Parameter  $\lambda$ :  $S_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix}$   $\lambda = -5$

**Aufgabe 9** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $B: b_1, b_2$  die Basis von  $\mathbb{R}^2$  bestehend aus  $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$  und  $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -35 \end{pmatrix}$ .

Der Vektor  $v$  sei bezüglich der Standardbasis  $E: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben durch  ${}_E v = \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie:

${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 12 & -35 \end{pmatrix}$   ${}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -35 & 3 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$   ${}_B v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

17. 12. 2022

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

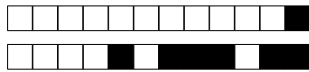
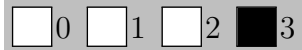
**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 2** (3 Punkte)Bestimmen Sie jeweils alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass

(a)  $u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  orthogonal sind:  $\alpha = \boxed{3}$

(b)  $|u_\alpha|^2 - \frac{7}{2}\alpha - 2 = 0$  gilt:  $\alpha \in \left\{ \frac{3}{2}, 2 \right\}$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  an:

$$\frac{(2-i)^3}{(1-i)^2} = \boxed{\frac{11}{2} + i}$$

(b) Sei nun  $z = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}$ . Bestimmen Sie den Betrag  $|z|$  sowie das Argument  $\theta \in [0, 2\pi)$ :

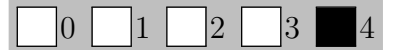
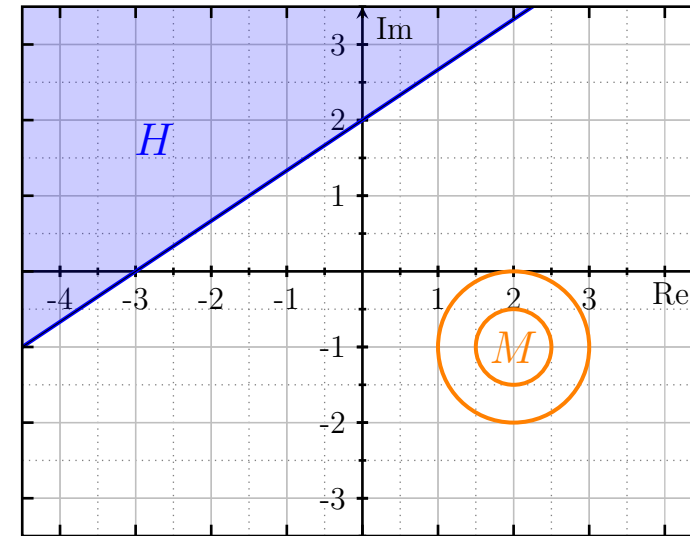
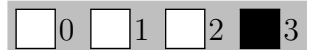
$|z| = \boxed{2} \quad \theta = \boxed{\frac{\pi}{3}}$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix  $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1+3\alpha & 1 & 1-3\alpha \\ -1 & 3-3\alpha & 9\alpha^2+1 & -2+3\alpha \\ 1 & -1+3\alpha & 3\alpha & 3-9\alpha \end{pmatrix}$

(a) Sei zunächst  $\alpha := 0$  sowie  $b := (1, 2, 3)^\top$ . Bestimmen sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des linearen Gleichungssystems  $A_0x = b$ :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{7}{2} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{L} \left( \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Bestimmen Sie alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass die Matrix  $A_\alpha$  Rang 3 hat.  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ **Aufgabe 5** (4 Punkte)(a) Sei  $w = -2 + 3i$ . Skizzieren Sie die Menge  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z\bar{w}) \geq 6\}$ .(b) Für  $z \in \mathbb{C}$  sei nun  $d(z) := |z - 2 + i|$  der Abstand von  $z$  zu  $2 - i$ .Ergänzen Sie die Skizze um die Menge  $M := \left\{z \in \mathbb{C} \mid (d(z))^2 - \frac{3}{2}d(z) + \frac{1}{2} = 0\right\}$ :**Aufgabe 6** (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie:  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix  $D = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie:  $\det(D) = \boxed{18}$ 

$$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DD^\top = \begin{pmatrix} 20 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 18 \end{pmatrix}$$



**Aufgabe 8** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben sei die Ebene  $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_2 + 4x_3 + 2 = 0\}$  sowie die von einem Parameter  $\delta \in \mathbb{R}$

abhängige Gerade  $g_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \delta \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ .

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von  $E$ :  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{5}$ .

(b) Für welchen Wert für  $\delta$  ist  $g_\delta$  parallel zu  $E$ ?  $\delta = \frac{3}{2}$

Bestimmen Sie in diesem Fall ferner den Abstand  $a$  der Geraden  $g_\delta$  und  $E$ :  $a = 2$

(c) Sei nun  $\delta = 4$ . Bestimmen Sie den Schnittpunkt  $S_4$  von  $E$  und  $g_4$  sowie den zugehörigen

Parameter  $\lambda$ :  $S_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$   $\lambda = -1$

**Aufgabe 9** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $B: b_1, b_2$  die Basis von  $\mathbb{R}^2$  bestehend aus  $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \end{pmatrix}$  und  $b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -43 \end{pmatrix}$ .

Der Vektor  $v$  sei bezüglich der Standardbasis  $E: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben durch  ${}_E v = \begin{pmatrix} -2 \\ 21 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie:

${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -11 & -43 \end{pmatrix}$   ${}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -43 & -4 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$   ${}_B v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

17. 12. 2022

1  2  3  4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

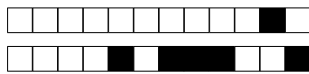
**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



0  1  2  3

**Aufgabe 2** (3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass

(a)  $u_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  orthogonal sind:  $\alpha = \boxed{4}$

(b)  $|u_\alpha|^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{15}{2} = 0$  gilt:  $\alpha \in \left\{ \boxed{-\frac{1}{2}, 3} \right\}$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  an:

$$\frac{(2-i)^3}{(1+i)^2} = \boxed{-\frac{11}{2} - i}$$

(b) Sei nun  $z = \frac{2}{1+i}$ . Bestimmen Sie den Betrag  $|z|$  sowie das Argument  $\theta \in [0, 2\pi)$ :

$$|z| = \boxed{\sqrt{2}} \quad \theta = \boxed{\frac{7\pi}{4}}$$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben sei die Matrix  $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1-4\alpha & 1-4\alpha & 1 \\ -1 & -3+4\alpha & -2+4\alpha & 16\alpha^2+1 \\ 1 & 1-4\alpha & 3-12\alpha & 4\alpha \end{pmatrix}$

(a) Sei zunächst  $\alpha := 0$  sowie  $b := (2, 1, 3)^\top$ . Bestimmen sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des linearen Gleichungssystems  $A_0x = b$ :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + L \left( \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Bestimmen Sie alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass die Matrix  $A_\alpha$  Rang 3 hat.  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \boxed{\frac{1}{4}} \right\}$

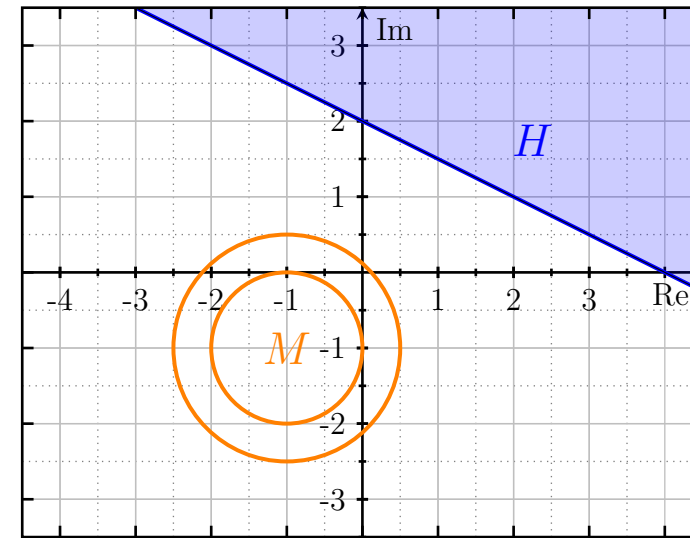
**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

(a) Sei  $w = 2 - i$ . Skizzieren Sie die Menge  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z\bar{w}) \geq 4\}$ .

(b) Für  $z \in \mathbb{C}$  sei nun  $d(z) := |z + 1 + i|$  der Abstand von  $z$  zu  $-1 - i$ .

Ergänzen Sie die Skizze um die Menge  $M := \{z \in \mathbb{C} \mid (d(z))^2 - \frac{5}{2}d(z) + \frac{3}{2} = 0\}$ :



**Aufgabe 6** (3 Punkte)

0  1  2  3

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie:  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Gegeben sei die Matrix  $D = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie:  $\det(D) = \boxed{40}$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DD^\top = \begin{pmatrix} 32 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 29 \end{pmatrix}$$



**Aufgabe 8** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben sei die Ebene  $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 3x_3 + 3 = 0\}$  sowie die von einem Parameter  $\delta \in \mathbb{R}$

abhängige Gerade  $g_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \delta \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ .

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von  $E$ :  $\left\langle \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{3}{5}$ .

(b) Für welchen Wert für  $\delta$  ist  $g_\delta$  parallel zu  $E$ ?  $\delta = \frac{9}{4}$

Bestimmen Sie in diesem Fall ferner den Abstand  $a$  der Geraden  $g_\delta$  und  $E$ :  $a = 3$

(c) Sei nun  $\delta = 1$ . Bestimmen Sie den Schnittpunkt  $S_1$  von  $E$  und  $g_1$  sowie den zugehörigen

Parameter  $\lambda$ :  $S_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$   $\lambda = 3$

**Aufgabe 9** (3 Punkte)

0  1  2  3

Sei  $B: b_1, b_2$  die Basis von  $\mathbb{R}^2$  bestehend aus  $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$  und  $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -41 \end{pmatrix}$ .

Der Vektor  $v$  sei bezüglich der Standardbasis  $E: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben durch  ${}_E v = \begin{pmatrix} 2 \\ 26 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie:

${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 14 & -41 \end{pmatrix}$   ${}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -41 & 3 \\ -14 & 1 \end{pmatrix}$   ${}_B v = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

17. 12. 2022

1  2  3  4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

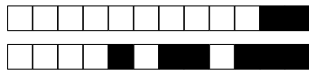
**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



**Aufgabe 2** (3 Punkte)

0  1  2  3

Bestimmen Sie jeweils alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass

(a)  $u_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  orthogonal sind:  $\alpha = \boxed{-3}$

(b)  $|u_\alpha|^2 - 8\alpha - 1 = 0$  gilt:  $\alpha \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  an:

$\frac{(2+i)^3}{(1+i)^2} = \boxed{\frac{11}{2} - i}$

(b) Sei nun  $z = \frac{4}{\sqrt{3}-i}$ . Bestimmen Sie den Betrag  $|z|$  sowie das Argument  $\theta \in [0, 2\pi)$ :

$|z| = \boxed{2}$   $\theta = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben sei die Matrix  $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1+2\alpha & -1 & 1+2\alpha \\ -1 & -3-2\alpha & -4\alpha^2-1 & -2-2\alpha \\ 1 & 1+2\alpha & 2\alpha & 3+6\alpha \end{pmatrix}$

(a) Sei zunächst  $\alpha := 0$  sowie  $b := (-2, 1, 3)^T$ . Bestimmen sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des linearen Gleichungssystems  $A_0x = b$ :

$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + L \left( \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) Bestimmen Sie alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass die Matrix  $A_\alpha$  Rang 3 hat.  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

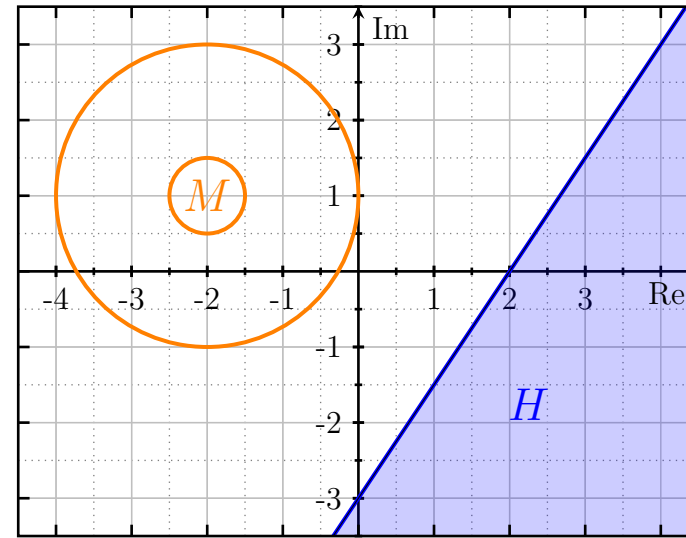
**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

(a) Sei  $w = 3 - 2i$ . Skizzieren Sie die Menge  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z\bar{w}) \geq 6\}$ .

(b) Für  $z \in \mathbb{C}$  sei nun  $d(z) := |z + 2 - i|$  der Abstand von  $z$  zu  $-2 + i$ .

Ergänzen Sie die Skizze um die Menge  $M := \{z \in \mathbb{C} \mid (d(z))^2 - \frac{5}{2}d(z) + 1 = 0\}$ :



**Aufgabe 6** (3 Punkte)

0  1  2  3

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie:  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Gegeben sei die Matrix  $D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie:  $\det(D) = \boxed{20}$

$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$  und  $DD^T = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 29 \end{pmatrix}$ .



**Aufgabe 8** (6 Punkte)

 0  1  2  3  4  5  6

Gegeben sei die Ebene  $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -4x_1 + 3x_2 + 4 = 0\}$  sowie die von einem Parameter  $\delta \in \mathbb{R}$

abhängige Gerade  $g_\delta := \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ \delta \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ .

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von  $E$ :  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{5}$ .

(b) Für welchen Wert für  $\delta$  ist  $g_\delta$  parallel zu  $E$ ?  $\delta = \frac{8}{3}$

Bestimmen Sie in diesem Fall ferner den Abstand  $a$  der Geraden  $g_\delta$  und  $E$ :  $a = 8$

(c) Sei nun  $\delta = -4$ . Bestimmen Sie den Schnittpunkt  $S_{-4}$  von  $E$  und  $g_{-4}$  sowie den zugehörigen

Parameter  $\lambda$ :  $S_{-4} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$   $\lambda = 2$

**Aufgabe 9** (3 Punkte)

 0  1  2  3

Sei  $B: b_1, b_2$  die Basis von  $\mathbb{R}^2$  bestehend aus  $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \end{pmatrix}$  und  $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -33 \end{pmatrix}$ .

Der Vektor  $v$  sei bezüglich der Standardbasis  $E: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben durch  ${}_E v = \begin{pmatrix} -2 \\ 32 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie:

${}_E \text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -17 & -33 \end{pmatrix}$

${}_B \text{id}_E = \begin{pmatrix} -33 & -2 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$

${}_B v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

17. 12. 2022

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

 1  2  3  4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

 0  1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

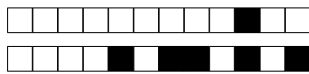
**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**



**Aufgabe 2** (3 Punkte)

0  1  2  3

Bestimmen Sie jeweils alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass

(a)  $u_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  orthogonal sind:  $\alpha = \boxed{-4}$

(b)  $|u_\alpha|^2 + \frac{7}{2}\alpha + 1 = 0$  gilt:  $\alpha \in \left\{ \boxed{-\frac{7}{2}}, \boxed{-2} \right\}$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  an:

$\frac{(2+i)^3}{(1-i)^2} = \boxed{-\frac{11}{2} + i}$

(b) Sei nun  $z = \frac{4}{1-i}$ . Bestimmen Sie den Betrag  $|z|$  sowie das Argument  $\theta \in [0, 2\pi)$ :

$|z| = \boxed{2\sqrt{2}}$   $\theta = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben sei die Matrix  $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1+3\alpha & -1-3\alpha & 1 \\ -1 & -3-3\alpha & 2+3\alpha & 9\alpha^2+1 \\ 1 & 1+3\alpha & -3-9\alpha & -3\alpha \end{pmatrix}$

(a) Sei zunächst  $\alpha := 0$  sowie  $b := (-2, -1, 3)^T$ . Bestimmen sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des linearen Gleichungssystems  $A_0x = b$ :

$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + L \left( \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) Bestimmen Sie alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass die Matrix  $A_\alpha$  Rang 3 hat.  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \boxed{-\frac{1}{3}} \right\}$

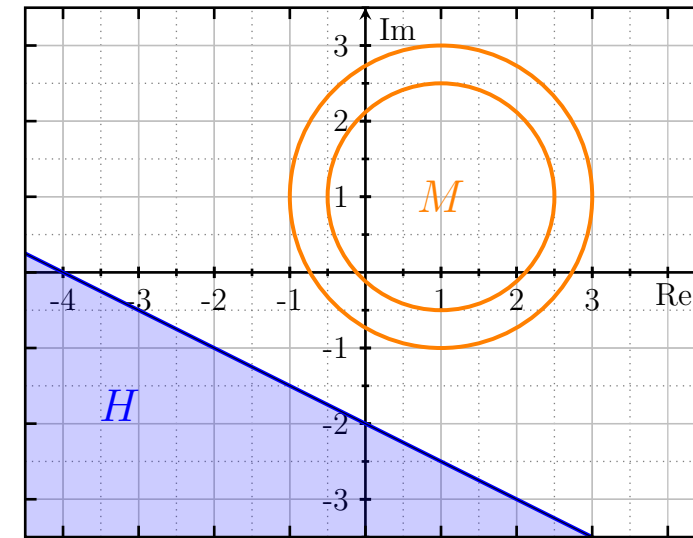
**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

(a) Sei  $w = -2 + i$ . Skizzieren Sie die Menge  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z\bar{w}) \geq 4\}$ .

(b) Für  $z \in \mathbb{C}$  sei nun  $d(z) := |z - 1 - i|$  der Abstand von  $z$  zu  $1 + i$ .

Ergänzen Sie die Skizze um die Menge  $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid (d(z))^2 - \frac{7}{2}d(z) + 3 = 0 \right\}$ :



**Aufgabe 6** (3 Punkte)

0  1  2  3

Gegeben sei die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie:  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7** (3 Punkte)

0  1  2  3

Gegeben sei die Matrix  $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie:  $\det(D) = \boxed{30}$

$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}$  und  $DD^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -15 \\ 0 & 0 & -15 & 18 \end{pmatrix}$ .