



Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 60 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $B: b_1, b_2$ die Basis von \mathbb{C}^2 bestehend aus $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ sei bezüglich der Standardbasis $E: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

gegeben durch $\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie:

$${}_B \text{id}_E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \quad E^{\alpha_B} = \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ 3i & 3 \end{pmatrix} \quad {}_B \alpha_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Berechnen Sie $\sum_{k=1}^5 (2k-1) = 25$ und

$$(q^3 - 1) \sum_{k=1}^6 q^k = 1 \cdot q^9 + 1 \cdot q^8 + 1 \cdot q^7 + 0 \cdot q^6 + 0 \cdot q^5 + 0 \cdot q^4 + (-1) \cdot q^3 + (-1) \cdot q^2 + (-1) \cdot q^1 + 0$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $10^{2n+1} + 1$ ohne Rest durch 11 teilbar, das heißt es gibt ein $k_n \in \mathbb{Z}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k_n$.

IA Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt: $10^{2 \cdot 0 + 1} + 1 = 10 + 1 = 11$ und 11 ist durch 11 teilbar.

IS Induktionsschluss:

IH: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gebe es ein $k_n \in \mathbb{Z}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k_n$.
 Es gilt: $10^{2(n+1)+1} + 1 = 100 \cdot 10^{2n+1} + 1 = (99 + 1) \cdot 10^{2n+1} + 1$
 $= 99 \cdot 10^{2n+1} + (10^{2n+1} + 1) \stackrel{\text{IH}}{=} 9 \cdot 11 \cdot 10^{2n+1} + 11 \cdot k_n$
 $= (9 \cdot 10^{2n+1} + k_n) \cdot 11,$

also ist $10^{2(n+1)+1} + 1$ ebenfalls durch 11 teilbar.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\det A = -3 \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A^{-1}) = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die Polynome $\alpha X, X^2 + 5X, -X^2$ gegeben.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind diese Polynome linear abhängig?

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden diese Polynome eine Basis von $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$?

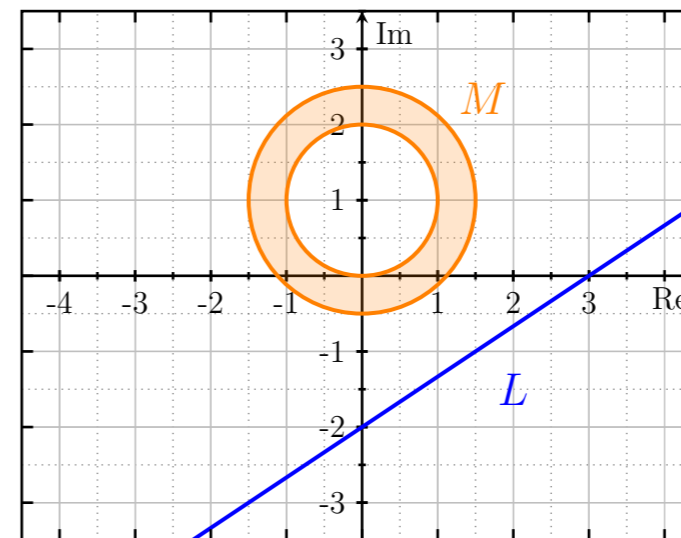
$$\alpha \in \emptyset$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Menge $L := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{2}{3} \text{Re}(z) - 2 = \text{Im}(z) \right\}$ in die komplexe Zahlenebene.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ sei nun $d(z) := |z - i|$ der Abstand von z zu i .

Ergänzen Sie die Skizze um die Menge $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid (d(z))^2 - \frac{5}{2}d(z) + \frac{3}{2} \leq 0 \right\}$





Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 60 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

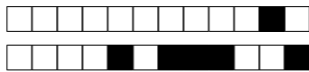
Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



Aufgabe 2 (3 Punkte)



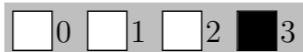
Sei $B: b_1, b_2$ die Basis von \mathbb{C}^2 bestehend aus $b_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \end{pmatrix}$.

Die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ sei bezüglich der Standardbasis $E: e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

gegeben durch $\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} -2i \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie:

$${}_B \text{id}_E = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad E^{\alpha_B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4i & 8 \end{pmatrix} \quad {}_B \alpha_B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)



Berechnen Sie $\sum_{k=1}^5 (2k+1) = 35$ und

$$(1-q^2) \sum_{k=2}^7 q^k = (-1) \cdot q^9 + (-1) \cdot q^8 + 0 \cdot q^7 + 0 \cdot q^6 + 0 \cdot q^5 + 0 \cdot q^4 + 1 \cdot q^3 + 1 \cdot q^2 + 0 \cdot q^1 + 0$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)



Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $10^{2n+1} + 1$ ohne Rest durch 11 teilbar, das heißt es gibt ein $k_n \in \mathbb{Z}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k_n$.

IA Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt: $10^{2 \cdot 0 + 1} + 1 = 10 + 1 = 11$ und 11 ist durch 11 teilbar.

IS Induktionsschluss:

IH: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gebe es ein $k_n \in \mathbb{Z}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k_n$.

Es gilt:

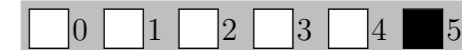
$$10^{2(n+1)+1} + 1 = 100 \cdot 10^{2n+1} + 1 = 100 \cdot 10^{2n+1} + 100 - 99$$

$$= 100 \cdot (10^{2n+1} + 1) - 99 \stackrel{\text{IH}}{=} 100 \cdot k_n \cdot 11 - 9 \cdot 11$$

$$= (100k_n - 9) \cdot 11,$$

also ist $10^{2(n+1)+1} + 1$ ebenfalls durch 11 teilbar.

Aufgabe 5 (5 Punkte)



Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\det A = 3 \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 6 (2 Punkte)



Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die Polynome $X, 3X^2 - X, \alpha X^2$ gegeben.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind diese Polynome linear abhängig?

$\alpha \in \mathbb{R}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden diese Polynome eine Basis von $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$?

$\alpha \in \emptyset$

Aufgabe 7 (4 Punkte)



(a) Skizzieren Sie die Menge $L := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{2}{3} \text{Re}(z) + 2 = \text{Im}(z) \right\}$ in die komplexe Zahlenebene.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ sei nun $d(z) := |z + i|$ der Abstand von z zu $-i$.

Ergänzen Sie die Skizze um die Menge $M := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid (d(z))^2 - 2d(z) + \frac{3}{4} \leq 0 \right\}$

