

Name,
 Vorname:

Matrikel-
 Nummer:

Studien-
 gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/5	/4	/2	/2	/4	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
 Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 2)^2} =$

(b) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(5 + 3(-1)^n + (-1)^n \frac{1}{n+1} \right) =$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)} =$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 + 6} \right) =$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Gegeben sind das Vektorfeld

$$f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1 + 1)e^{x_1} + 10x_1x_2 \\ ax_1^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C: [-\ln(4), \ln(4)] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie, für welches a das Vektorfeld f_a ein Potential besitzt, und geben Sie für diesen Wert von a ein Potential U von f_a an.

$$a = \boxed{}, \quad U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- (b) Bestimmen Sie $C'(t)$ und berechnen Sie die Länge $L(K)$ der Kurve K .

$$C'(t) = \boxed{}, \quad L(K) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Wir betrachten die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy^3 - 4xy - 2x - \frac{2}{3}y^3 + 8y$$

auf dem 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

- (a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad \text{H } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- (b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f , die im 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ liegen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-5)^n t^n}{\pi^{n-3}}$ konvergent?

Für $t \in$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{4^{2n} (2n)!} =$$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Gegeben ist die von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{\alpha, \beta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} (\alpha x + 4x)^2, & \text{falls } x \neq \beta, \\ \beta & \text{falls } x = \beta. \end{cases}$$

(a) Sei $\alpha = 1$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $f_{1, \beta}$ stetig?

$$\beta \in \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$$

(b) Sei $\beta = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_{\alpha, 1}$ stetig?

$$\alpha \in \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{x + 3y}.$$

Berechnen Sie:

(a) den Gradienten von f : $\text{grad } f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array}, \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)^T$

(b) den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } f \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array}, \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)^T$

(c) die Ableitung von f längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\partial_v f(a) =$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 4x \cosh(2x) \, dx =$

(b) $\int \frac{9x - 7}{x^2 + 1} \, dx =$

(c) $\int \frac{9x + 7}{x^2 - 1} \, dx =$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f: (-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 5^k}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(a) Geben Sie die Potenzreihe von f' um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

$f'(x) =$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f' an.

$f'(x) =$

(c) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f an und berechnen Sie $f(1)$.

$f(x) =$

, $f(1) =$

Name,
 Vorname:

Matrikel-
 Nummer:

Studien-
 gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/5	/4	/2	/2	/4	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
 Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 2)^2} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + 3(-1)^n + (-1)^n \frac{1}{n+1} \right) =$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)} =$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x^2 + 2} \right) =$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Gegeben sind das Vektorfeld

$$f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1 + 1)e^{x_1} + 8x_1x_2 \\ ax_1^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C: [-\ln(5), \ln(5)] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie, für welches a das Vektorfeld f_a ein Potential besitzt, und geben Sie für diesen Wert von a ein Potential U von f_a an.

$$a = \boxed{}, \quad U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- (b) Bestimmen Sie $C'(t)$ und berechnen Sie die Länge $L(K)$ der Kurve K .

$$C'(t) = \boxed{}, \quad L(K) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Wir betrachten die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy^3 - 4xy - 3x - y^3 + 12y$$

auf dem 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

- (a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad \text{H } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- (b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f , die im 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ liegen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3^n (-t)^n}{\pi^{n-5}}$ konvergent?

Für $t \in$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{6^{2n} (2n)!} =$$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Gegeben ist die von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{\alpha, \beta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} (\alpha x + 3x)^2, & \text{falls } x \neq \beta, \\ \beta & \text{falls } x = \beta. \end{cases}$$

(a) Sei $\alpha = 1$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $f_{1, \beta}$ stetig?

$$\beta \in \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$$

(b) Sei $\beta = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_{\alpha, 1}$ stetig?

$$\alpha \in \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{x + 4y}.$$

Berechnen Sie:

(a) den Gradienten von f : $\text{grad } f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array}, \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)^T$

(b) den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } f \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array}, \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)^T$

(c) die Ableitung von f längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\partial_v f(a) =$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 9x \cosh(3x) dx =$

(b) $\int \frac{3x-5}{x^2+1} dx =$

(c) $\int \frac{3x+5}{x^2-1} dx =$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f: (-6, 6) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k 6^k}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(a) Geben Sie die Potenzreihe von f' um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

$f'(x) =$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f' an.

$f'(x) =$

(c) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f an und berechnen Sie $f(1)$.

$f(x) =$

, $f(1) =$

Name,
 Vorname:

Matrikel-
 Nummer:

Studien-
 gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/5	/4	/2	/2	/4	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
 Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$)

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 2)^2} =$

(b) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(4 + 3(-1)^n + (-1)^n \frac{1}{n+2} \right) =$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(5x)} =$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 9x} - \sqrt{x^2 + 8} \right) =$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Gegeben sind das Vektorfeld

$$f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1 + 1)e^{x_1} + 6x_1x_2 \\ ax_1^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C: [-\ln(3), \ln(3)] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie, für welches a das Vektorfeld f_a ein Potential besitzt, und geben Sie für diesen Wert von a ein Potential U von f_a an.

$$a = \boxed{}, \quad U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- (b) Bestimmen Sie $C'(t)$ und berechnen Sie die Länge $L(K)$ der Kurve K .

$$C'(t) = \boxed{}, \quad L(K) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Wir betrachten die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy^3 - xy - 3x - y^3 + 3y$$

auf dem 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

- (a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad \text{H } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- (b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f , die im 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ liegen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-6)^n t^n}{\pi^{n-3}}$ konvergent?

Für $t \in$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n} (2n)!} =$$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Gegeben ist die von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{\alpha, \beta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} (\alpha x + 2x)^2, & \text{falls } x \neq \beta, \\ \beta & \text{falls } x = \beta. \end{cases}$$

(a) Sei $\alpha = 1$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $f_{1, \beta}$ stetig?

$$\beta \in \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$$

(b) Sei $\beta = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_{\alpha, 1}$ stetig?

$$\alpha \in \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{5x + y}.$$

Berechnen Sie:

(a) den Gradienten von f : $\text{grad } f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array}, \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)^T$

(b) den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } f \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array}, \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)^T$

(c) die Ableitung von f längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\partial_v f(a) =$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 4x \sinh(2x) \, dx =$

(b) $\int \frac{5x - 9}{x^2 + 1} \, dx =$

(c) $\int \frac{5x + 9}{x^2 - 1} \, dx =$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f: (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k 3^k}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(a) Geben Sie die Potenzreihe von f' um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

$f'(x) =$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f' an.

$f'(x) =$

(c) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f an und berechnen Sie $f(1)$.

$f(x) =$

, $f(1) =$

Name,
 Vorname:

Matrikel-
 Nummer:

Studien-
 gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/5	/4	/2	/2	/4	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
 Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 2)^2} =$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + 3(-1)^n + (-1)^n \frac{1}{n+2} \right) =$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(4x)} =$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4} \right) =$

Aufgabe 3 (5 Punkte) Gegeben sind das Vektorfeld

$$f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1 + 1)e^{x_1} + 4x_1x_2 \\ ax_1^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C: [-\ln(6), \ln(6)] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie, für welches a das Vektorfeld f_a ein Potential besitzt, und geben Sie für diesen Wert von a ein Potential U von f_a an.

$$a = \boxed{}, \quad U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- (b) Bestimmen Sie $C'(t)$ und berechnen Sie die Länge $L(K)$ der Kurve K .

$$C'(t) = \boxed{}, \quad L(K) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Wir betrachten die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy^3 - xy - 4x - \frac{4}{3}y^3 + 4y$$

auf dem 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

- (a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad \text{H } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- (b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f , die im 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ liegen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{7^n (-t)^n}{\pi^{n-5}}$ konvergent? Für $t \in$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{6^{2n} (2n)!} =$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Gegeben ist die von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{\alpha, \beta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} (\alpha x + 5x)^2, & \text{falls } x \neq \beta, \\ \beta & \text{falls } x = \beta. \end{cases}$$

(a) Sei $\alpha = 1$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $f_{1, \beta}$ stetig? $\beta \in$

(b) Sei $\beta = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_{\alpha, 1}$ stetig? $\alpha \in$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{2x + y}.$$

Berechnen Sie:

(a) den Gradienten von f : $\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \text{[]} \\ \text{[]} \end{array}, \begin{array}{c} \text{[]} \\ \text{[]} \end{array} \right)^T$

(b) den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } f \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \text{[]} \\ \text{[]} \end{array}, \begin{array}{c} \text{[]} \\ \text{[]} \end{array} \right)^T$

(c) die Ableitung von f längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\partial_v f(a) =$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 9x \sinh(3x) \, dx =$

(b) $\int \frac{7x - 3}{x^2 + 1} \, dx =$

(c) $\int \frac{7x + 3}{x^2 - 1} \, dx =$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f: (-4, 4) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 4^k}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(a) Geben Sie die Potenzreihe von f' um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

$f'(x) =$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f' an.

$f'(x) =$

(c) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f an und berechnen Sie $f(1)$.

$f(x) =$

, $f(1) =$