Aufgabe 7 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Gegeben sei die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Finden Sie streng monoton steigende Folgen von natürlichen Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$,

(b) $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine alternierende Folge ist,

(c) $(a_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge ist.

$n_k = \boxed{2k+1}$ $\quad m_k = \boxed{2k}$ $\quad l_k = \boxed{4k+2}$

Bestimmen Sie den Limes inferior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \boxed{-\mathrm{e}}$$

Aufgabe 8 (7 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 13x_1^2 + 13x_2^2 + 10x_1x_2 = 144 \right\}.$$

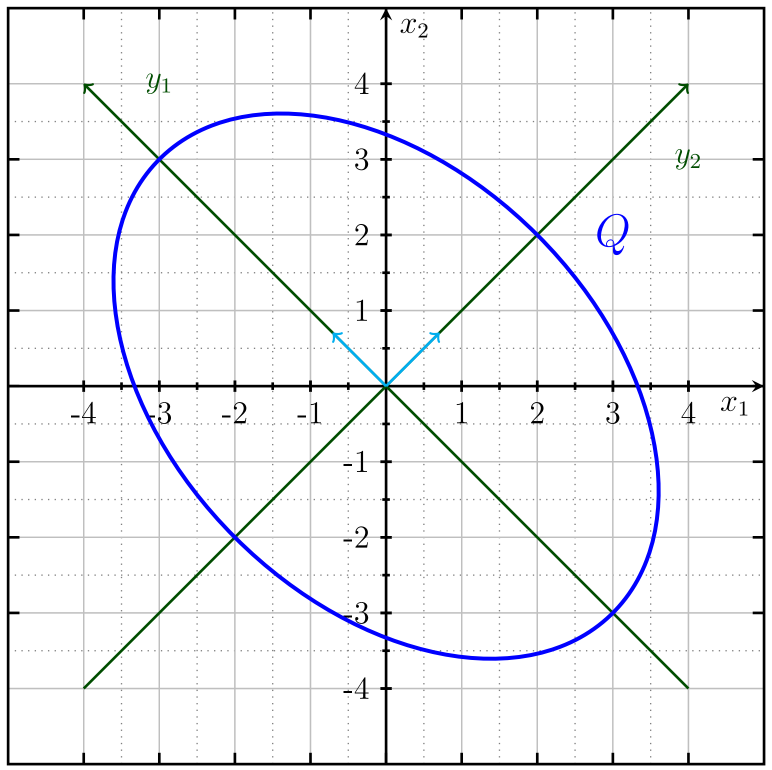
Finden Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem Q euklidische Normalform hat. Geben Sie diese euklidische Normalform explizit an. Zeichnen Sie dann sowohl die Achsen des neuen Koordinatensystems als auch die Quadrik in das untenstehende Koordinatensystem ein.

Koordinatensystem:

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Euklidische Normalform:

$$-\tfrac{1}{18}y_1^2 - \tfrac{1}{8}y_2^2 + 1 = 0$$



Nachklausur 2 **Höhere Mathematik 1** **10. 02. 2023**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben sei die Drehmatrix

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3\sqrt{2} \\ -3 & 5 & -\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Gerade g, welche die Drehachse von A beschreibt, sowie den Cosinus des Drehwinkels α von A:

$$g = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)} \qquad \cos\alpha = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben seien $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \alpha+2 \\ \alpha-3 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $B = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 5 \\ \mathrm{i} & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Matrix A_α invertierbar ist.

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}}$$

(b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $(A_0)^4$.

$$\det((A_0)^4) = \boxed{16}$$

(c) Die Spur der Matrix $(A_0)^4$ ist -4. Was sind die Eigenwerte von $(A_0)^4$?

$$\boxed{-2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}, \quad -2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$$

(d) Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

$$\det(B) = \boxed{2-3\mathrm{i}}, \qquad \det(B^{-1}) = \boxed{\frac{2}{13}+\frac{3}{13}\mathrm{i}}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte λ sowie die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten e_λ und d_λ von

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}:$$

λ	$-14, \quad 3, \quad -5$
e_λ	$e_{-14} = 1, \quad e_3 = 1, \quad e_{-5} = 2$
d_λ	$d_{-14} = 1, \quad d_3 = 1, \quad d_{-5} = 1$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ sowie die affinen Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie die folgenden Koordinatentransformationen.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : {}_{\mathbb{G}}X \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}} {}_{\mathbb{G}}X + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : {}_{\mathbb{E}}X \mapsto \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}} {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : {}_{\mathbb{G}}X \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}} {}_{\mathbb{G}}X + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$. Finden Sie Vektoren $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass f_1, f_2, f_3 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist und $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$ sowie $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$ gilt.

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad f_2 = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad f_3 = \boxed{\frac{1}{6}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$