**Aufgabe 8** (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + (y - \tfrac{33}{2})^2 \qquad\qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y - x^2$$

Berechnen Sie die Gradienten von $f$ und $g$.

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}} \qquad \operatorname{grad} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\phantom{xxxxx}}$$

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für kritische Stellen von $f$ unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ beschreiben:

Nennen Sie alle kritischen Punkte $(x, y)^\intercal$, d.h. alle Punkte $(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die obigen drei Gleichungen erfüllt sind:

Die Funktion $f$ beschreibt das Quadrat des Abstands eines Punktes $(x, y)^\intercal$ zum Punkt $(0, \frac{33}{2})^\intercal$.

Auf der Parabel $y = x^2$ gibt es Punkte mit minimalem Abstand $d$ zum Punkt $(0, \frac{33}{2})^\intercal$.

Nennen Sie einen solchen Punkt $(x_0, y_0)^\intercal$ auf der Parabel sowie den minimalen Abstand $d$:

Punkt $(x_0, y_0)^\intercal = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$ und Abstand $d = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$.

+1/1/60+



Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 |

**Aufgabe 2** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int 3\cos(x)\big(\sin(x)\big)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 3\cos(x)\big(\sin(x)\big)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(c) $\displaystyle\int 2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

**Aufgabe 3** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie:

| $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(2x)+3x^2-2x^3}{x^2-x^3}$ | $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x}-x$ | $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x+x^3}{\sin(3\pi x)}$ |
|---|---|---|
| | | |

**Aufgabe 4** (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Berechnen Sie:

| $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{-2n}\pi^{2n}}{(-1)^n(2n)!}$ | $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+2)!}$ |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 5** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{5x^2-5}{(x+2)(x^2+1)} = \square\,.$$

**Aufgabe 6** (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Gegeben sei die Funktion $f\colon (2,+\infty)\to\mathbb{R} : x\mapsto 2\cos\left(\pi\sqrt{x-2}\right)$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$ ☐

$f''(x) =$ ☐

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 6$:

$$T_2(f,x,6) = \square + \square\cdot(x-6) + \square\cdot(x-6)^2$$

**Aufgabe 7** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0\in\mathbb{C}$ in der Form $a+b\mathrm{i}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$.

| | $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3^n n!}\left((1-\mathrm{i})z+4\right)^n$ | $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}-3^k}{2k}(z+4\mathrm{i})^k$ | $\displaystyle\sum_{m=3}^{\infty} m\left(\frac{(z+2-2\mathrm{i})^2}{5}\right)^m$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | | | |
| $\rho$ | | | |

**Aufgabe 8** (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + (y - \tfrac{99}{2})^2 \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y$$

Berechnen Sie die Gradienten von $f$ und $g$.

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\phantom{xxxxxx}} \qquad \operatorname{grad} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\phantom{xxxx}}$$

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für kritische Stellen von $f$ unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ beschreiben:

Nennen Sie alle kritischen Punkte $(x, y)^\intercal$, d.h. alle Punkte $(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die obigen drei Gleichungen erfüllt sind:

Die Funktion $f$ beschreibt das Quadrat des Abstands eines Punktes $(x, y)^\intercal$ zum Punkt $(0, \frac{99}{2})^\intercal$. Auf der Parabel $y = x^2$ gibt es Punkte mit minimalem Abstand $d$ zum Punkt $(0, \frac{99}{2})^\intercal$. Nennen Sie einen solchen Punkt $(x_0, y_0)^\intercal$ auf der Parabel sowie den minimalen Abstand $d$:

Punkt $(x_0, y_0)^\intercal = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$ und Abstand $d = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$.



**Scheinklausur** **Höhere Mathematik 2** **15. 7. 2023**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\|x\|$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 |

**Aufgabe 2** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int -3\cos(x)\big(\sin(x)\big)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(b) $\int_0^{\pi/2} -3\cos(x)\big(\sin(x)\big)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(c) $\int -2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(d) $\int_0^{+\infty} -2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

---

**Aufgabe 3** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie:

| $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(4x)+5x+7x^3}{4x+x^3}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x}-x$ | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x+2x^2}{\sin(3\pi x)}$ |
|---|---|---|
| | | |

---

**Aufgabe 4** (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Berechnen Sie:

| $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^{-2n}\pi^{2n}}{(-1)^n(2n)!}$ | $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+4}{(n+2)!}$ |
|---|---|
| | |

---

**Aufgabe 5** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{10x^2+5}{(x-2)(x^2+1)} = \boxed{\phantom{xxxx}}\,.$$

---

**Aufgabe 6** (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Gegeben sei die Funktion $f\colon (2,+\infty)\to\mathbb{R} : x\mapsto \sin\big(\pi\sqrt{x-2}\big)$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$ ☐

$f''(x) =$ ☐

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 6$:

$$T_2(f,x,6) = \boxed{\phantom{xx}} + \boxed{\phantom{xx}}\cdot(x-6) + \boxed{\phantom{xx}}\cdot(x-6)^2$$

---

**Aufgabe 7** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0\in\mathbb{C}$ in der Form $a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$.

| | $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{2^{3k}-4^k}{3k}(z+2\mathrm{i})^k$ | $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{1}{5^n n!}\big((1-\mathrm{i})z+2\big)^n$ | $\sum\limits_{m=2}^{\infty} m\left(\dfrac{(z+3+3\mathrm{i})^2}{2}\right)^m$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | | | |
| $\rho$ | | | |

**Aufgabe 8** (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + (y - \tfrac{73}{2})^2 \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y - x^2$$

Berechnen Sie die Gradienten von $f$ und $g$.

$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$ ☐ $\qquad \operatorname{grad} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$ ☐

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für kritische Stellen von $f$ unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ beschreiben:

☐

Nennen Sie alle kritischen Punkte $(x, y)^\intercal$, d.h. alle Punkte $(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die obigen drei Gleichungen erfüllt sind:

☐

Die Funktion $f$ beschreibt das Quadrat des Abstands eines Punktes $(x, y)^\intercal$ zum Punkt $(0, \frac{73}{2})^\intercal$.

Auf der Parabel $y = x^2$ gibt es Punkte mit minimalem Abstand $d$ zum Punkt $(0, \frac{73}{2})^\intercal$.

Nennen Sie einen solchen Punkt $(x_0, y_0)^\intercal$ auf der Parabel sowie den minimalen Abstand $d$:

Punkt $(x_0, y_0)^\intercal =$ ☐ und Abstand $d =$ ☐ .



**Scheinklausur** **Höhere Mathematik 2** **15. 7. 2023**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a\, x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b)\, b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 |

**Aufgabe 2** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 6\sin(x)\big(\cos(x)\big)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(b) $\int_0^{\pi/2} 6\sin(x)\big(\cos(x)\big)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(c) $\int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(d) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

**Aufgabe 3** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie:

| $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(4x)+6x^2+3x^3}{4x^3-5}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+8x}-x$ | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x+3x^3}{\sin(2\pi x)}$ |
|---|---|---|
| | | |

**Aufgabe 4** (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Berechnen Sie:

| $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{6^{-2n}\pi^{2n}}{(-1)^n(2n)!}$ | $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+2)!}$ |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 5** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{5x^2+10}{(x-2)(x^2+1)} = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}}.$$

**Aufgabe 6** (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Gegeben sei die Funktion $f\colon(-3,+\infty)\to\mathbb{R}: x\mapsto -\cos\big(\pi\sqrt{x+3}\big)$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$ ☐

$f''(x) =$ ☐

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f,x,1) = \boxed{\phantom{xx}} + \boxed{\phantom{xx}}\cdot(x-1) + \boxed{\phantom{xx}}\cdot(x-1)^2$$

**Aufgabe 7** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0\in\mathbb{C}$ in der Form $a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$.

| | $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{4^n n!}\left((1+\mathrm{i})z+4\right)^n$ | $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{3^{2k}-4^k}{2k}(z+\mathrm{i})^k$ | $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{(z+1-\mathrm{i})^2}{7}\right)^m$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | | | |
| $\rho$ | | | |

**Aufgabe 8** (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + (y - \tfrac{51}{2})^2 \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y$$

Berechnen Sie die Gradienten von $f$ und $g$.

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \qquad \operatorname{grad} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für kritische Stellen von $f$ unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ beschreiben:

Nennen Sie alle kritischen Punkte $(x, y)^\intercal$, d.h. alle Punkte $(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die obigen drei Gleichungen erfüllt sind:

Die Funktion $f$ beschreibt das Quadrat des Abstands eines Punktes $(x, y)^\intercal$ zum Punkt $(0, \frac{51}{2})^\intercal$.

Auf der Parabel $y = x^2$ gibt es Punkte mit minimalem Abstand $d$ zum Punkt $(0, \frac{51}{2})^\intercal$.

Nennen Sie einen solchen Punkt $(x_0, y_0)^\intercal$ auf der Parabel sowie den minimalen Abstand $d$:

Punkt $(x_0, y_0)^\intercal =$ und Abstand $d =$ .



**Scheinklausur** **Höhere Mathematik 2** **15. 7. 2023**

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

| $f(x)$ | $x^a$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $e^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

**Gruppe:**

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 9 | 9 |

**Aufgabe 2** (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int -6\sin(x)\big(\cos(x)\big)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(b) $\int_0^{\pi/2} -6\sin(x)\big(\cos(x)\big)^{3/2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(c) $\int -xe^{-2x}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

(d) $\int_0^{+\infty} -xe^{-2x}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

**Aufgabe 3** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie:

| $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)+3x^2-2x^3}{5x+2x^3}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x}-x$ | $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-3x+x^2}{\sin(2\pi x)}$ |
|---|---|---|
| | | |

**Aufgabe 4** (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Berechnen Sie:

| $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{-2n}\pi^{2n}}{(-1)^n(2n)!}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{(n+2)!}$ |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 5** (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{-10x^2+10}{(x-2)(x^2+1)} = \square\,.$$

**Aufgabe 6** (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-3,+\infty)\to\mathbb{R} : x\mapsto -\sin\big(\pi\sqrt{x+3}\big)$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$ ☐

$f''(x) =$ ☐

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f,x,1) = \square + \square\cdot(x-1) + \square\cdot(x-1)^2$$

**Aufgabe 7** (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0\in\mathbb{C}$ in der Form $a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$.

| | $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^{2k}-5^k}{2k}(z+3\mathrm{i})^k$ | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}\big((1+\mathrm{i})z+2\big)^n$ | $\sum_{m=3}^{\infty} m\left(\frac{(z-3+\mathrm{i})^2}{3}\right)^m$ |
|---|---|---|---|
| $z_0$ | | | |
| $\rho$ | | | |