



Aufgabe 8 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + (y - \frac{33}{2})^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y - x^2$$

Berechnen Sie die Gradienten von f und g .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 33 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für kritische Stellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben:

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda x &= 0 \\ 2y - 33 + \lambda &= 0 \\ y - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Nennen Sie alle kritischen Punkte $(x,y)^T$, d.h. alle Punkte $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die obigen drei Gleichungen erfüllt sind:

$$(0,0)^T, \quad (4,16)^T, \quad (-4,16)^T$$

Die Funktion f beschreibt das Quadrat des Abstands eines Punktes $(x,y)^T$ zum Punkt $(0, \frac{33}{2})^T$.

Auf der Parabel $y = x^2$ gibt es Punkte mit minimalem Abstand d zum Punkt $(0, \frac{33}{2})^T$.

Nennen Sie einen solchen Punkt $(x_0, y_0)^T$ auf der Parabel sowie den minimalen Abstand d :

Punkt $(x_0, y_0)^T = (4,16)^T$ und Abstand $d = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Scheinklausur

Höhere Mathematik 2

15. 7. 2023

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

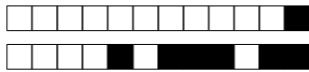
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



Aufgabe 2 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 3 \cos(x) (\sin(x))^{3/2} dx = \left[\frac{6}{5} (\sin(x))^{5/2} \right]$

(b) $\int_0^{\pi/2} 3 \cos(x) (\sin(x))^{3/2} dx = \frac{6}{5}$

(c) $\int 2xe^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} (2x + 1) \right]$

(d) $\int_0^{+\infty} 2xe^{-2x} dx = \frac{1}{2}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

0 1 2 3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2x) + 3x^2 - 2x^3}{x^2 - x^3}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^3}{\sin(3\pi x)}$
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3\pi}$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

0 1 2

Berechnen Sie:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-2n} \pi^{2n}}{(-1)^n (2n)!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+2)!}$
$\frac{1}{2}$	$3 - e$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

0 1 2 3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$\frac{5x^2 - 5}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{3}{x+2} + \frac{2x-4}{x^2+1}$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7

Gegeben sei die Funktion $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2 \cos(\pi\sqrt{x-2})$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) = -\frac{\pi \sin(\pi\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}}$

$f''(x) = \frac{\pi (-\pi\sqrt{x-2} \cos(\pi\sqrt{x-2}) + \sin(\pi\sqrt{x-2}))}{2(x-2)^{3/2}}$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 6$:

$T_2(f, x, 6) = 2 + 0 \cdot (x-6) + \left(-\frac{\pi^2}{16}\right) \cdot (x-6)^2$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^n n!} ((1-i)z + 4)^n$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k} - 3^k}{2k} (z + 4i)^k$	$\sum_{m=3}^{\infty} m \left(\frac{(z+2-2i)^2}{5} \right)^m$
z_0	$-2 - 2i$	$-4i$	$-2 + 2i$
ρ	$+\infty$	$\frac{1}{4}$	$\sqrt{5}$



Aufgabe 8 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + (y - \frac{99}{2})^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y$$

Berechnen Sie die Gradienten von f und g .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 99 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für kritische Stellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben:

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 2y - 99 - \lambda &= 0 \\ x^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

Nennen Sie alle kritischen Punkte $(x,y)^T$, d.h. alle Punkte $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die obigen drei Gleichungen erfüllt sind:

$$(0,0)^T, \quad (7,49)^T, \quad (-7,49)^T$$

Die Funktion f beschreibt das Quadrat des Abstands eines Punktes $(x,y)^T$ zum Punkt $(0, \frac{99}{2})^T$.

Auf der Parabel $y = x^2$ gibt es Punkte mit minimalem Abstand d zum Punkt $(0, \frac{99}{2})^T$.

Nennen Sie einen solchen Punkt $(x_0, y_0)^T$ auf der Parabel sowie den minimalen Abstand d :

Punkt $(x_0, y_0)^T = (7,49)^T$ und Abstand $d = \frac{\sqrt{197}}{2}$.

Scheinklausur

Höhere Mathematik 2

15. 7. 2023

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

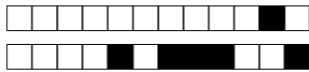
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



Aufgabe 2 (4 Punkte)

 0 1 2 3 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int -3 \cos(x) (\sin(x))^{3/2} dx = \left[-\frac{6}{5} (\sin(x))^{5/2} \right]$

(b) $\int_0^{\pi/2} -3 \cos(x) (\sin(x))^{3/2} dx = -\frac{6}{5}$

(c) $\int -2xe^{-2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{-2x} (2x + 1) \right]$

(d) $\int_0^{+\infty} -2xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

 0 1 2 3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(4x) + 5x + 7x^3}{4x + x^3}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - x$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + 2x^2}{\sin(3\pi x)}$
7	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3\pi}$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

 0 1 2

Berechnen Sie:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{-2n} \pi^{2n}}{(-1)^n (2n)!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{(n+2)!}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$3e - 5$

+2/2/57+

Aufgabe 5 (3 Punkte)

 0 1 2 3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{10x^2 + 5}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{9}{x-2} + \frac{x+2}{x^2+1}$$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

 0 1 2 3 4 5 6 7

Gegeben sei die Funktion $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(\pi\sqrt{x-2})$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) = \frac{\pi \cos(\pi\sqrt{x-2})}{2\sqrt{x-2}}$

$f''(x) = \frac{-\pi (\pi\sqrt{x-2} \sin(\pi\sqrt{x-2}) + \cos(\pi\sqrt{x-2}))}{4(x-2)^{3/2}}$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 6$:

$$T_2(f, x, 6) = 0 + \frac{\pi}{4} \cdot (x-6) + \left(-\frac{\pi}{64}\right) \cdot (x-6)^2$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

 0 1 2 3 4 5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{3k} - 4^k}{3k} (z+2i)^k$	$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{5^{n!}} ((1-i)z+2)^n$	$\sum_{m=2}^{\infty} m \left(\frac{(z+3+3i)^2}{2} \right)^m$
z_0	$-2i$	$-1-i$	$-3-3i$
ρ	$\frac{1}{8}$	$+\infty$	$\sqrt{2}$



Aufgabe 8 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + (y - \frac{73}{2})^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y - x^2$$

Berechnen Sie die Gradienten von f und g .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 73 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für kritische Stellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben:

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda x &= 0 \\ 2y - 73 + \lambda &= 0 \\ y - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Nennen Sie alle kritischen Punkte $(x,y)^T$, d.h. alle Punkte $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die obigen drei Gleichungen erfüllt sind:

$$(0,0)^T, \quad (6,36)^T, \quad (-6,36)^T$$

Die Funktion f beschreibt das Quadrat des Abstands eines Punktes $(x,y)^T$ zum Punkt $(0, \frac{73}{2})^T$.

Auf der Parabel $y = x^2$ gibt es Punkte mit minimalem Abstand d zum Punkt $(0, \frac{73}{2})^T$.

Nennen Sie einen solchen Punkt $(x_0, y_0)^T$ auf der Parabel sowie den minimalen Abstand d :

Punkt $(x_0, y_0)^T = (6,36)^T$ und Abstand $d = \frac{\sqrt{145}}{2}$.

Scheinklausur

Höhere Mathematik 2

15. 7. 2023

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

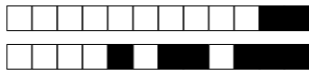
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



Aufgabe 2 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 6 \sin(x) (\cos(x))^{3/2} dx =$

(b) $\int_0^{\pi/2} 6 \sin(x) (\cos(x))^{3/2} dx =$

(c) $\int x e^{-2x} dx =$

(d) $\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx =$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

0 1 2 3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(4x) + 6x^2 + 3x^3}{4x^3 - 5}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 8x} - x$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + 3x^3}{\sin(2\pi x)}$
$\frac{3}{4}$	4	$\frac{5}{2\pi}$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

0 1 2

Berechnen Sie:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^{-2n} \pi^{2n}}{(-1)^n (2n)!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+2)!}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	5 - 2e

Aufgabe 5 (3 Punkte)

0 1 2 3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$\frac{5x^2 + 10}{(x-2)(x^2 + 1)} =$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7

Gegeben sei die Funktion $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\cos(\pi\sqrt{x+3})$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$f'(x) =$

$f''(x) =$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$T_2(f, x, 1) =$ $+$ $\cdot (x-1) +$ $\cdot (x-1)^2$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{4^n n!} ((1+i)z + 4)^n$	$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^{2k} - 4^k}{2k} (z+i)^k$	$\sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{(z+1-i)^2}{7} \right)^m$
z_0	-2 + 2i	-i	-1 + i
ρ	$+\infty$	$\frac{1}{9}$	$\sqrt{7}$



Aufgabe 8 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + (y - \frac{51}{2})^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y$$

Berechnen Sie die Gradienten von f und g .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - 51 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für kritische Stellen von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ beschreiben:

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 2y - 51 - \lambda &= 0 \\ x^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

Nennen Sie alle kritischen Punkte $(x,y)^T$, d.h. alle Punkte $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$, zu denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so gibt, dass die obigen drei Gleichungen erfüllt sind:

$$(0,0)^T, \quad (5,25)^T, \quad (-5,25)^T$$

Die Funktion f beschreibt das Quadrat des Abstands eines Punktes $(x,y)^T$ zum Punkt $(0, \frac{51}{2})^T$.

Auf der Parabel $y = x^2$ gibt es Punkte mit minimalem Abstand d zum Punkt $(0, \frac{51}{2})^T$.

Nennen Sie einen solchen Punkt $(x_0, y_0)^T$ auf der Parabel sowie den minimalen Abstand d :

Punkt $(x_0, y_0)^T = (5,25)^T$ und Abstand $d = \frac{\sqrt{101}}{2}$.

Scheinklausur

Höhere Mathematik 2

15. 7. 2023

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

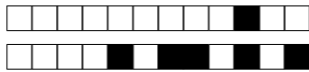
Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



Aufgabe 2 (4 Punkte)

 0 1 2 3 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int -6 \sin(x) (\cos(x))^{3/2} dx = \left[\frac{12}{5} (\cos(x))^{5/2} \right]$

(b) $\int_0^{\pi/2} -6 \sin(x) (\cos(x))^{3/2} dx = -\frac{12}{5}$

(c) $\int -xe^{-2x} dx = \left[\frac{1}{4} e^{-2x} (2x + 1) \right]$

(d) $\int_0^{+\infty} -xe^{-2x} dx = -\frac{1}{4}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

 0 1 2 3

Berechnen Sie:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x) + 3x^2 - 2x^3}{5x + 2x^3}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + x^2}{\sin(2\pi x)}$
-1	-1	$-\frac{3}{2\pi}$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

 0 1 2

Berechnen Sie:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{-2n} \pi^{2n}}{(-1)^n (2n)!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{(n+2)!}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2e - 3$

+4/2/53+

Aufgabe 5 (3 Punkte)

 0 1 2 3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung für

$$\frac{-10x^2 + 10}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{-6}{x-2} + \frac{-4x-8}{x^2+1}$$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

 0 1 2 3 4 5 6 7

Gegeben sei die Funktion $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\sin(\pi\sqrt{x+3})$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{-\pi \cos(\pi\sqrt{x+3})}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f''(x) = \frac{\pi (\pi\sqrt{x+3} \sin(\pi\sqrt{x+3}) + \cos(\pi\sqrt{x+3}))}{4(x+3)^{3/2}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f, x, 1) = 0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot (x-1) + \frac{\pi}{64} \cdot (x-1)^2$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

 0 1 2 3 4 5

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^{2k} - 5^k}{2k} (z + 3i)^k$	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} ((1+i)z + 2)^n$	$\sum_{m=3}^{\infty} m \left(\frac{(z-3+i)^2}{3} \right)^m$
z_0	-3i	-1 + i	3 - i
ρ	$\frac{1}{16}$	$+\infty$	$\sqrt{3}$