Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/5	/2	/7	/2	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Übungsgruppe:** ☐

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_\alpha = \begin{pmatrix} 6 \\ \alpha + 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie α so, dass u_α und v_α ...

(a) orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$,

(b) die gleiche Länge haben: $\alpha = \boxed{}$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 1)^\intercal$ und $v_2 = (3, 8, -2, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^4$. Ferner ist gegeben $v_3 = (\alpha, -4, -4, 2)^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die drei Vektoren linear abhängig sind.

$\alpha = \boxed{}$

(b) Sei nun $\alpha = -4$. Bestimmen Sie: $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Koordinatensysteme $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}v) = \boxed{}\ {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{}, \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}v) = \boxed{}\ {}_{\mathbb{E}}v + \boxed{}.$$

(b) Der Punkt S besitzt die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}S = \boxed{}$.

(c) Es gibt einen Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, für den ${}_{\mathbb{E}}X = {}_{\mathbb{F}}X$ gilt. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}X = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 + 2n^2 - 12n + 9}{3n^3 + 10n^2 + 3} = \boxed{}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \boxed{}$.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α:

$$\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \boxed{}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \qquad \lambda_2 = \boxed{}, \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

(c) Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ hat die Matrix den Eigenwert $\lambda = 0$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $V(0)$ und die geometrische Vielfachheit d_0 :

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\boxed{}\right), \qquad d_0 = \boxed{}$$

(d) Ist die Matrix $A_{-\frac{1}{2}}$ diagonalisierbar? $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto \begin{pmatrix} 3p(0) \\ 3p'(0) \end{pmatrix},$$

die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ mit $b_1(X) = 3X^2 - 2,\ b_2(X) = 2X + 3,\ b_3(X) = X^2 + X$ sowie die Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\varphi_B$ an.

$${}_E\varphi_B = \boxed{}$$

(b) Ist φ injektiv? $\boxed{}$ Ist φ surjektiv? $\boxed{}$ Ist φ bijektiv? $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\, x_1^2 + 2s x_1 x_2 + \tfrac{1}{2}\, x_2^2 + x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$

(a) Die Quadrik Q_s hat die Matrixbeschreibung $Q_s = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Geben Sie die Matrix A sowie die erweiterte Matrix A_{erw} von Q_s an.

$A =$ $\boxed{}$, $A_{\text{erw}} =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang r_{erw} der erweiterten Matrix A_{erw}.

$r_{\text{erw}} =$ $\boxed{}$

(c) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist Q_s eine parabolische Quadrik?

$s =$ $\boxed{}$

(d) Sei nun $s = 0$. Geben Sie die euklidische Normalform (ENF) und die Gestalt der Quadrik Q_0 sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem Q_0 diese euklidische Normalform besitzt.

ENF: $\boxed{}$, Gestalt: $\boxed{}$, $\mathbb{F} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 3\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$ $\boxed{}$, $z_2 =$ $\boxed{}$, $z_3 =$ $\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/5	/2	/7	/2	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Übungsgruppe:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie α so, dass u_α und v_α ...

(a) orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$,

(b) die gleiche Länge haben: $\alpha = \boxed{}$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 1)^\intercal$ und $v_2 = (3, 8, -2, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^4$. Ferner ist gegeben $v_3 = (\alpha, -7, -2, 1)^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die drei Vektoren linear abhängig sind.

$\alpha = \boxed{}$

(b) Sei nun $\alpha = -2$. Bestimmen Sie: $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Koordinatensysteme $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}v) = \boxed{}\ {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{}, \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}v) = \boxed{}\ {}_{\mathbb{E}}v + \boxed{}.$$

(b) Der Punkt S besitzt die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}S = \boxed{}$.

(c) Es gibt einen Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, für den ${}_{\mathbb{E}}X = {}_{\mathbb{F}}X$ gilt. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}X = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - 12n + 9}{7n^3 + 10n^2 + 3} = \boxed{},$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α:

$$\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \boxed{}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \qquad \lambda_2 = \boxed{}, \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

(c) Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ hat die Matrix den Eigenwert $\lambda = 0$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $V(0)$ und die geometrische Vielfachheit d_0 :

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\boxed{}\right), \qquad d_0 = \boxed{}$$

(d) Ist die Matrix $A_{-\frac{1}{2}}$ diagonalisierbar? $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \ \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon p \mapsto \begin{pmatrix} 2p(0) \\ 3p'(0) \end{pmatrix},$$

die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ mit $b_1(X) = 3X^2 - 2,\ b_2(X) = 2X + 3,\ b_3(X) = X^2 + X$ sowie die Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\varphi_B$ an.

$${}_E\varphi_B = \boxed{}$$

(b) Ist φ injektiv? $\boxed{}$ Ist φ surjektiv? $\boxed{}$ Ist φ bijektiv? $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{3}{2}\,x_1^2 + 2sx_1x_2 + \tfrac{3}{2}\,x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 = 0 \right\}.$$

(a) Die Quadrik Q_s hat die Matrixbeschreibung $Q_s = \{(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Geben Sie die Matrix A sowie die erweiterte Matrix A_{erw} von Q_s an.

$A =$ $\boxed{}$, $A_{\mathrm{erw}} =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang r_{erw} der erweiterten Matrix A_{erw}.

$r_{\mathrm{erw}} =$ $\boxed{}$

(c) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist Q_s eine parabolische Quadrik?

$s =$ $\boxed{}$

(d) Sei nun $s = 0$. Geben Sie die euklidische Normalform (ENF) und die Gestalt der Quadrik Q_0 sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem Q_0 diese euklidische Normalform besitzt.

ENF: $\boxed{}$, Gestalt: $\boxed{}$, $\mathbb{F} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 4\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$ $\boxed{}$, $z_2 =$ $\boxed{}$, $z_3 =$ $\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/5	/2	/7	/2	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:		**Übungsgruppe:**	

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_\alpha = \begin{pmatrix} 6 \\ \alpha - 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie α so, dass u_α und v_α ...

(a) orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$,

(b) die gleiche Länge haben: $\alpha = \boxed{}$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1,3,-2,1)^\intercal$ und $v_2 = (3,8,-2,1)^\intercal \in \mathbb{R}^4$. Ferner ist gegeben $v_3 = (\alpha,-9,-4,2)^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die drei Vektoren linear abhängig sind.

$\alpha = \boxed{}$

(b) Sei nun $\alpha = -1$. Bestimmen Sie: $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Koordinatensysteme $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}v) = \boxed{}\ {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{}, \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}v) = \boxed{}\ {}_{\mathbb{E}}v + \boxed{}.$$

(b) Der Punkt S besitzt die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}S = \boxed{}$.

(c) Es gibt einen Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, für den ${}_{\mathbb{E}}X = {}_{\mathbb{F}}X$ gilt. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}X = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 + 2n^2 - 12n + 9}{8n^3 + 10n^2 + 3} = \boxed{}$,

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n} = \boxed{}$.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α:

$$\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \boxed{}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \qquad \lambda_2 = \boxed{}, \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

(c) Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ hat die Matrix den Eigenwert $\lambda = 0$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $V(0)$ und die geometrische Vielfachheit d_0 :

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\boxed{}\right), \qquad d_0 = \boxed{}$$

(d) Ist die Matrix $A_{-\frac{1}{2}}$ diagonalisierbar? $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto \begin{pmatrix} 2p(0) \\ 2p'(0) \end{pmatrix},$$

die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit $b_1(X) = 3X^2 - 2,\ b_2(X) = 2X + 3,\ b_3(X) = X^2 + X$ sowie die Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\varphi_B$ an.

$${}_E\varphi_B = \boxed{}$$

(b) Ist φ injektiv? $\boxed{}$ Ist φ surjektiv? $\boxed{}$ Ist φ bijektiv? $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\,x_1^2 - 2s x_1 x_2 + \tfrac{1}{2}\,x_2^2 - x_1 - x_2 = 0 \right\}.$$

(a) Die Quadrik Q_s hat die Matrixbeschreibung $Q_s = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Geben Sie die Matrix A sowie die erweiterte Matrix A_{erw} von Q_s an.

$A =$ $\boxed{}$, $A_{\text{erw}} =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang r_{erw} der erweiterten Matrix A_{erw}.

$r_{\text{erw}} =$ $\boxed{}$

(c) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist Q_s eine parabolische Quadrik?

$s =$ $\boxed{}$

(d) Sei nun $s = 0$. Geben Sie die euklidische Normalform (ENF) und die Gestalt der Quadrik Q_0 sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem Q_0 diese euklidische Normalform besitzt.

ENF: $\boxed{}$, Gestalt: $\boxed{}$, $\mathbb{F} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 5\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$ $\boxed{}$, $z_2 =$ $\boxed{}$, $z_3 =$ $\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/5	/2	/7	/2	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Übungsgruppe:** ☐

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie α so, dass u_α und v_α ...

(a) orthogonal sind: $\alpha = \square$,

(b) die gleiche Länge haben: $\alpha = \square$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 1)^\intercal$ und $v_2 = (3, 8, -2, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^4$. Ferner ist gegeben $v_3 = (\alpha, -1, -6, 3)^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die drei Vektoren linear abhängig sind.

$\alpha = \boxed{}$

(b) Sei nun $\alpha = -3$. Bestimmen Sie: $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Koordinatensysteme $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}v) = \boxed{}\ {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{}, \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}v) = \boxed{}\ {}_{\mathbb{E}}v + \boxed{}.$$

(b) Der Punkt S besitzt die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}S = \boxed{}$.

(c) Es gibt einen Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, für den ${}_{\mathbb{E}}X = {}_{\mathbb{F}}X$ gilt. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}X = \boxed{}$.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 + 2n^2 - 12n + 9}{5n^3 + 10n^2 + 3} = \boxed{},$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α:

$$\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \boxed{}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α:

$$\lambda_1 = \boxed{}\,, \qquad \lambda_2 = \boxed{}\,, \qquad \lambda_3 = \boxed{}$$

(c) Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ hat die Matrix den Eigenwert $\lambda = 0$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $V(0)$ und die geometrische Vielfachheit d_0 :

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\boxed{}\right), \qquad d_0 = \boxed{}$$

(d) Ist die Matrix $A_{-\frac{1}{2}}$ diagonalisierbar? $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto \begin{pmatrix} 3p(0) \\ 2p'(0) \end{pmatrix},$$

die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ mit $b_1(X) = 3X^2 - 2,\ b_2(X) = 2X + 3,\ b_3(X) = X^2 + X$ sowie die Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\varphi_B$ an.

$${}_E\varphi_B = \boxed{}$$

(b) Ist φ injektiv? $\boxed{}$ Ist φ surjektiv? $\boxed{}$ Ist φ bijektiv? $\boxed{}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{3}{2}\,x_1^2 - 2sx_1x_2 + \tfrac{3}{2}\,x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 = 0 \right\}.$$

(a) Die Quadrik Q_s hat die Matrixbeschreibung $Q_s = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Geben Sie die Matrix A sowie die erweiterte Matrix A_{erw} von Q_s an.

$A =$ $\boxed{}$, $A_{\text{erw}} =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang r_{erw} der erweiterten Matrix A_{erw}.

$r_{\text{erw}} =$ $\boxed{}$

(c) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist Q_s eine parabolische Quadrik?

$s =$ $\boxed{}$

(d) Sei nun $s = 0$. Geben Sie die euklidische Normalform (ENF) und die Gestalt der Quadrik Q_0 sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem Q_0 diese euklidische Normalform besitzt.

ENF: $\boxed{}$, Gestalt: $\boxed{}$, $\mathbb{F} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 6\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$ $\boxed{}$, $z_2 =$ $\boxed{}$, $z_3 =$ $\boxed{}$
