



Aufgabe 6 (3 Punkte)

0 1 2 3

Berechnen Sie:

| | | |
|---|--|--|
| $\sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \left(\frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} \right)$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^k$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4n}}{2n}$ |
| $-\frac{6}{5}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{1}{2}$ |

Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$9 \leq |x|(x + 6).$$

$$x \in \{-3\} \cup [3(\sqrt{2} - 1), +\infty)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R .

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E : x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt von \vec{RP} und \vec{QP} :

$$\vec{RP} \times \vec{QP} = \begin{pmatrix} 50 \\ -55 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \mid x \rangle = d\} \quad \text{mit } n = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } d = 2.$$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| | | | | | |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

| | | | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 |
| <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 |
| <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 |
| <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 |
| <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 |
| <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 |
| <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 |

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Gegeben seien die Basis B von \mathbb{R}^4 sowie die Vektoren v, w :

$$B : b_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Koordinatenvektoren bezüglich B :

$${}_B v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_B w = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_B (v+w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben sei die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^4 \rightarrow \text{Pol}_2 \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto (a-b)X^2 + c(2-X) + d(X+3).$$

Bestimmen Sie $\alpha(w)$.

$$\alpha(w) = -12X^2 + 3X + 24$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben seien

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ \alpha \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u_α und v orthogonal sind: $\alpha = -\frac{40}{3}$.

(b) Sei nun $\alpha = 0$. Geben Sie den Betrag $|v|$ des Vektors v und den Cosinus des Winkels φ zwischen u_0 und v an:

$$|v| = 5\sqrt{2}, \quad \cos \varphi = \frac{2}{5}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

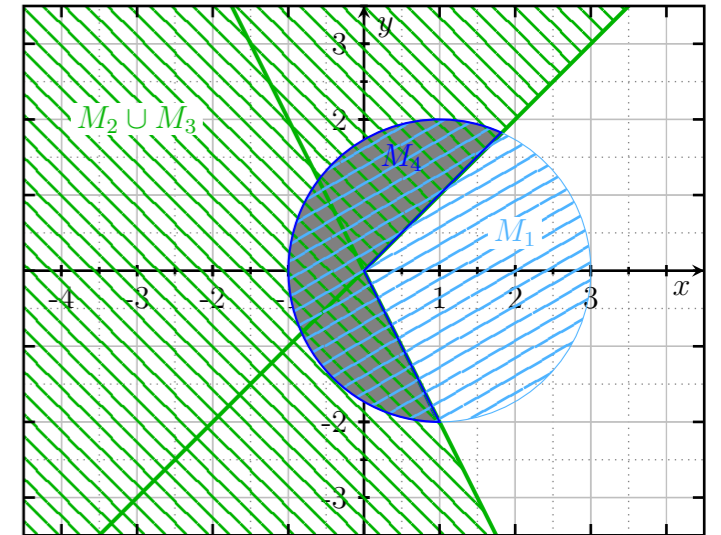
Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - 3 + y^2 \leq 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq -2x \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen $M_1, M_2 \cup M_3$ und $M_4 := M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ in die reelle Ebene ein. Markieren Sie durch unterschiedliche Schraffuren.



Aufgabe 5 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{1+7i}{1+2i} \right)^2 = 8 + 6i, \quad \bar{z} = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i, \text{ wobei } z = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+2i}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i \right) \text{ und } z_2 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)^3.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2|$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \frac{1}{2}, \quad \arg(z_1) = \frac{7}{6}\pi$$

$$|z_2| = 2, \quad \arg(z_2) = \frac{4}{3}\pi$$



Aufgabe 6 (3 Punkte)

0 1 2 3

Berechnen Sie:

| | | |
|--|--|---|
| $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 4n}}{n}$ | $\sum_{k=2}^5 \left(\frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{3k}\right)$ |
| 3 | 2 | $-\frac{1}{9}$ |

Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$16 \leq |x|(x + 8).$$

$$x \in \{-4\} \cup [4(\sqrt{2} - 1), +\infty)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R .

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt von \vec{RP} und \vec{QP} :

$$\vec{RP} \times \vec{QP} = \begin{pmatrix} 12 \\ 48 \\ -16 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \mid x \rangle = d\} \quad \text{mit } n = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und } d = 3.$$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| | | | | | |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

| | | | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 |
| <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 |
| <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 |
| <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 |
| <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 |
| <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 |
| <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 |

Name, Vorname:

Matrikelnummer:



Aufgabe 6 (3 Punkte)

0 1 2 3

Berechnen Sie:

| | | |
|--|---|---|
| $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ | $\sum_{k=2}^5 \frac{1}{4} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k-1}\right)$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9n^2 - 4n}}{n}$ |
| $\frac{4}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | 3 |

Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$1 \leq |x|(x + 2).$$

$x \in \{-1\} \cup [\sqrt{2} - 1, +\infty)$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R .

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E : x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt von \vec{RP} und \vec{QP} :

$$\vec{RP} \times \vec{QP} = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \mid x \rangle = d\} \quad \text{mit } n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } d = 5.$$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| | | | | | |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

| | | | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 |
| <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 |
| <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 |
| <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 |
| <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 |
| <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 |
| <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 |

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Gegeben seien die Basis B von \mathbb{R}^4 sowie die Vektoren v, w :

$$B : b_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Koordinatenvektoren bezüglich B :

$${}_B v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad {}_B w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_B (v+w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben sei die Abbildung

$$\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \text{Pol}_2 \mathbb{R}: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto (a-b)X^2 + c(2+X) + d(3X-1).$$

Bestimmen Sie $\alpha(w)$.

$$\alpha(w) = \boxed{-20X^2 + 35X}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben seien

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u_α und v orthogonal sind: $\alpha = \boxed{\frac{32}{3}}$.

(b) Sei nun $\alpha = 0$. Geben Sie den Betrag $|v|$ des Vektors v und den Cosinus des Winkels φ zwischen u_0 und v an:

$$|v| = \boxed{3\sqrt{6}}, \quad \cos \varphi = \boxed{\frac{8}{9}}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

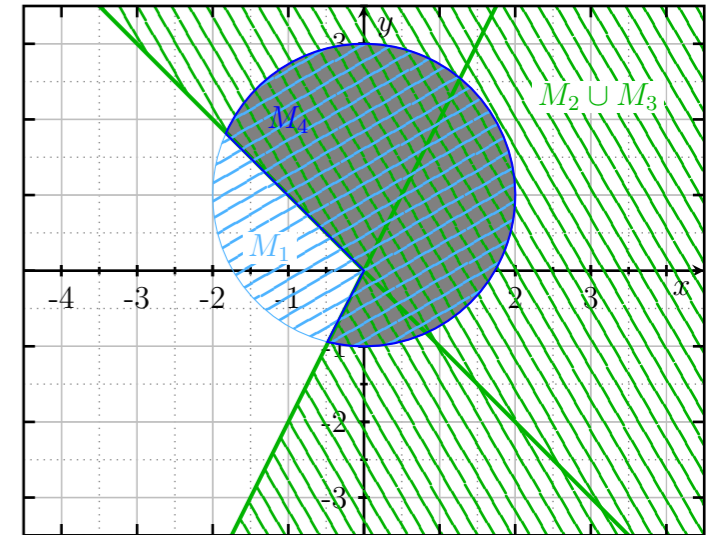
Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y - 3 \leq 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2x \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen $M_1, M_2 \cup M_3$ und $M_4 := M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ in die reelle Ebene ein. Markieren Sie durch unterschiedliche Schraffuren.



Aufgabe 5 (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{3+4i}{2+2i} \right)^2 = \boxed{3 + \frac{7}{8}i} \quad \bar{z} = \boxed{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i}, \quad \text{wobei } z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i \right) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{8} (1+i)(1-i)^3.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2|$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \arg(z_1) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$$

$$|z_2| = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \arg(z_2) = \boxed{\frac{3}{2}\pi}$$



Aufgabe 6 (3 Punkte)

0 1 2 3

Berechnen Sie:

| | | |
|---|---|--|
| $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4n}}{n}$ | $\sum_{n=1}^4 \left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} \right)$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^k$ |
| 1 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{5}{6}$ |

Aufgabe 7 (3 Punkte)

0 1 2 3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$4 \leq |x|(x + 4).$$

$$x \in \{-2\} \cup [2(\sqrt{2} - 1), +\infty)$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

0 1 2 3 4 5

Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R .

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E : x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt von \vec{RP} und \vec{QP} :

$$\vec{RP} \times \vec{QP} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \mid x \rangle = d\} \quad \text{mit } n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } d = 4.$$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| | | | | | |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

| | | | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 2 |
| <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 3 |
| <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 4 |
| <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 6 |
| <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 7 |
| <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 8 |
| <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 9 |

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

