| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /4 | /3 | /4 | /4 | /5 | /4 | /4 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| $f(x)$ | $x^a$ | $\mathrm{e}^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\, b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** ☐ **Übungsgruppe:** ☐

**Aufgabe 2** (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

**(a)** $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{x\sin(x)}{\sin(3x)} = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$

**(b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{9x+4}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

**(c)** $\displaystyle\int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}\,x = \boxed{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}$

**(d)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$

**Aufgabe 3** (*3 Punkte*)

**(a)** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{9+\frac{5}{n}}-3\right) = \boxed{\tfrac{5}{6}}$$

**(b)** Geben Sie drei Häufungspunkte $h_1,\ h_2,\ h_3 \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1}{2}\cos(2n!\,\pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$h_1 = \boxed{-\tfrac{1}{2}}$ , $h_2 = \boxed{\tfrac{1}{2}}$ , $h_3 = \boxed{\tfrac{3}{2}}$

---

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*) Die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow (-3,7):\ x \longmapsto \frac{7x-3}{x+1}$$

besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1}:\ (-3,7) \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Es gilt $f(1)=2$.

**(a)** Berechnen Sie: $f'(x) = \boxed{\dfrac{10}{(x+1)^2}}$ , $(f^{-1})'(2) = \boxed{\dfrac{2}{5}}$

**(b)** Bestimmen Sie die Tangente $t_1$ an den Graphen von $f$ im Punkt $(1,2)$.

$$t_1:\ y = \boxed{\frac{5}{2}}\ x + \boxed{-\frac{1}{2}}$$

**(c)** Bestimmen Sie die Tangente $t_2$ an den Graphen von $f^{-1}:\ (-3,7) \longrightarrow \mathbb{R}^+ :\ y \longmapsto x = f^{-1}(y)$ im Punkt $(2,1)$.

$$t_2:\ x = \boxed{\frac{2}{5}}\ y + \boxed{\frac{1}{5}}$$

---

**Aufgabe 5** (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} 2^k\big((1-3\mathrm{i})z-5\big)^k$ : $z_0 = \boxed{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}}$ , $\rho = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{10}}}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n\, n!}{2^n\, n^n}\big(z+3+2\mathrm{i}\big)^{5n}$ : $z_0 = \boxed{-3-2\mathrm{i}}$ , $\rho = \boxed{\sqrt[5]{2\mathrm{e}}}$

---

**Aufgabe 6** (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

**(a)** $\displaystyle\int 18x\sin(9x^2)\,\mathrm{d}\,x \;=\; \boxed{\left[-\cos\left(9x^2\right)\right]}$

**(b)** $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}\,x \;=\; \boxed{\left[2\ln|x+2|+\frac{5}{x+2}\right]}$

**(c)** $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}\,x \;=\; \boxed{\left[\ln\left(x^2+4x+5\right)-5\arctan(x+2)\right]}$

---

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(2y^3 - 6y\right).$$

**(a)** Berechnen Sie den Gradienten von $f$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(2y^3 - 6y) \\ (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(6y^2 - 6) \end{pmatrix}}$$

**(b)** Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von $f$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

**(c)** Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{H} f(x,y)$.

$$\mathrm{H} f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(2y^3 - 6y) & (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(6y^2 - 6) \\ (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(6y^2 - 6) & 12(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})y \end{pmatrix}}$$

**(d)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{1}\right)$.

$$T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{1}\right) = \boxed{-8 - 4x^2 + 12(y-1)^2}$$

---

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha \;:\; \mathbb{R} \times (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x\ln(y+1) \\ \dfrac{x^2}{y+1} + 8z^2 \\ \alpha^2 yz + \sin(z) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

**(a)** Bestimmen Sie die Rotation von $g_\alpha$.

$$\operatorname{rot} g_\alpha(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha^2 z - 16z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

**(b)** Für welche Parameter $\alpha$ besitzt $g_\alpha$ ein Potential?

$$\alpha \in \left\{ \boxed{-4, 4} \right\}$$

**(c)** Berechnen Sie für $\alpha = 4$ ein Potential $U$ von $g_4$.

$$U(x, y, z) = \boxed{x^2 \ln(y+1) + 8yz^2 - \cos(z)}$$

---

**Aufgabe 9** (*2 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

Tragen Sie jeweils „konvergent“ oder „divergent“ in das linke Kästchen ein, und geben Sie im rechten Kästchen ein Kriterium an, aus dem die Konvergenz bzw. Divergenz folgt.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(7n)}}$ ist divergent nach dem Integral–Vergleichskriterium .

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+3}}$ ist konvergent nach dem Leibniz–Kriterium .

---

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /4 | /3 | /4 | /4 | /5 | /4 | /4 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| $f(x)$ | $x^a$ | $\mathrm{e}^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

| **Name des Tutors/der Tutorin:** | | **Übungsgruppe:** | |
|---|---|---|---|

**Aufgabe 2** (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi} \frac{x\sin(x)}{\sin(5x)} = \boxed{\frac{2\pi}{5}}$

**(b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{4x+9}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

**(c)** $\displaystyle\int_5^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}\,x = \boxed{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}$

**(d)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{\frac{1}{5}}$

**Aufgabe 3** (*3 Punkte*)

**(a)** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{9+\tfrac{4}{n}}-3\right) = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

**(b)** Geben Sie drei Häufungspunkte $h_1$, $h_2$, $h_3 \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1}{3}\cos(2n!\,\pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$h_1 = \boxed{-\tfrac{2}{3}}\,, \qquad h_2 = \boxed{\tfrac{1}{3}}\,, \qquad h_3 = \boxed{\tfrac{4}{3}}$$

---

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*) Die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^+ \longrightarrow (1,7)\,:\, x \longmapsto \frac{7x+1}{x+1}$$

besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1}\,:\,(1,7)\longrightarrow \mathbb{R}^+$. Es gilt $f(1)=4$.

**(a)** Berechnen Sie: $f'(x) = \boxed{\dfrac{6}{(x+1)^2}}$ , $(f^{-1})'(4) = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

**(b)** Bestimmen Sie die Tangente $t_1$ an den Graphen von $f$ im Punkt $(1,4)$.

$$t_1\,:\, y = \boxed{\frac{3}{2}}\, x + \boxed{\frac{5}{2}}$$

**(c)** Bestimmen Sie die Tangente $t_2$ an den Graphen von $f^{-1}\,:\,(1,7)\longrightarrow\mathbb{R}^+\,:\,y\longmapsto x=f^{-1}(y)$ im Punkt $(4,1)$.

$$t_2\,:\, x = \boxed{\frac{2}{3}}\, y + \boxed{-\frac{5}{3}}$$

---

**Aufgabe 5** (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0\in\mathbb{C}$ in der Form $a+b\,\mathrm{i}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$.

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} 3^k\big((1+3\mathrm{i})z-5\big)^k$ : $z_0 = \boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}}$ , $\rho = \boxed{\dfrac{1}{3\sqrt{10}}}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n\, n!}{3^n\, n^n}\big(z+2-4\mathrm{i}\big)^{3n}$ : $z_0 = \boxed{-2+4\mathrm{i}}$ , $\rho = \boxed{\sqrt[3]{3\mathrm{e}}}$

---

**Aufgabe 6** (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

**(a)** $\int 14x \sin(7x^2)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\cos\left(7x^2\right)\right]}$

**(b)** $\int \frac{2x-2}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2\ln|x+2| + \frac{6}{x+2}\right]}$

**(c)** $\int \frac{2x-2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\ln\left(x^2+4x+5\right) - 6\arctan(x+2)\right]}$

---

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(y^3 - 12y\right).$$

**(a)** Berechnen Sie den Gradienten von $f$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(y^3 - 12y) \\ (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(3y^2 - 12) \end{pmatrix}}$$

**(b)** Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von $f$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

**(c)** Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f(x,y)$.

$$\mathrm{H}f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(y^3 - 12y) & (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(3y^2 - 12) \\ (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(3y^2 - 12) & 6(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})y \end{pmatrix}}$$

**(d)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{2}\right)$.

$$T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{2}\right) = \boxed{-32 - 16x^2 + 12(y-2)^2}$$

---

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha \;:\; \mathbb{R} \times (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x\ln(y+1) \\ \dfrac{x^2}{y+1} + \dfrac{9}{2}z^2 \\ \alpha^2 yz + \sin(z) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

**(a)** Bestimmen Sie die Rotation von $g_\alpha$.

$$\operatorname{rot} g_\alpha(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha^2 z - 9z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

**(b)** Für welche Parameter $\alpha$ besitzt $g_\alpha$ ein Potential?

$$\alpha \in \left\{ \boxed{-3, 3} \right\}$$

**(c)** Berechnen Sie für $\alpha = 3$ ein Potential $U$ von $g_3$.

$$U(x,y,z) = \boxed{x^2\ln(y+1) + \frac{9}{2}yz^2 - \cos(z)}$$

---

**Aufgabe 9** (*2 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

Tragen Sie jeweils „konvergent“ oder „divergent“ in das linke Kästchen ein, und geben Sie im rechten Kästchen ein Kriterium an, aus dem die Konvergenz bzw. Divergenz folgt.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+4}}$ ist $\boxed{\text{konvergent}}$ nach dem $\boxed{\text{Leibniz–Kriterium}}$.

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(3n)}}$ ist $\boxed{\text{divergent}}$ nach dem $\boxed{\text{Integral–Vergleichskriterium}}$.

---

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /4 | /3 | /4 | /4 | /5 | /4 | /4 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| $f(x)$ | $x^a$ | $\mathrm{e}^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\|x\|$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$ **Übungsgruppe:** $\boxed{\phantom{xxx}}$

**Aufgabe 2** (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

**(a)** $\displaystyle \lim_{x \to 4\pi} \frac{x \sin(x)}{\sin(3x)} = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$

**(b)** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x+4}}{\sqrt{x+5}} = \boxed{3}$

**(c)** $\displaystyle \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}\,x = \boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

**(d)** $\displaystyle \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

**Aufgabe 3** (*3 Punkte*)

**(a)** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{9+\tfrac{3}{n}}-3\right) = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

**(b)** Geben Sie drei Häufungspunkte $h_1$, $h_2$, $h_3 \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1}{4}\cos(2n!\,\pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$h_1 = \boxed{-\tfrac{3}{4}}\,, \qquad h_2 = \boxed{\tfrac{1}{4}}\,, \qquad h_3 = \boxed{\tfrac{5}{4}}$$

---

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (-2,8) : x \longmapsto \frac{8x-2}{x+1}$$

besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : (-2,8) \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Es gilt $f(1) = 3$.

**(a)** Berechnen Sie: $f'(x) = \boxed{\dfrac{10}{(x+1)^2}}$ , $(f^{-1})'(3) = \boxed{\dfrac{2}{5}}$

**(b)** Bestimmen Sie die Tangente $t_1$ an den Graphen von $f$ im Punkt $(1,3)$.

$$t_1 : y = \boxed{\frac{5}{2}}\; x + \boxed{\frac{1}{2}}$$

**(c)** Bestimmen Sie die Tangente $t_2$ an den Graphen von $f^{-1} : (-2,8) \longrightarrow \mathbb{R}^+ : y \longmapsto x = f^{-1}(y)$ im Punkt $(3,1)$.

$$t_2 : x = \boxed{\frac{2}{5}}\; y + \boxed{-\frac{1}{5}}$$

---

**Aufgabe 5** (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} 2^k\big((1-3\mathrm{i})z+5\big)^k$ : $z_0 = \boxed{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}}$ , $\rho = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{10}}}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n\, n!}{2^n\, n^n}\big(z+2+3\mathrm{i}\big)^{3n}$ : $z_0 = \boxed{-2-3\mathrm{i}}$ , $\rho = \boxed{\sqrt[3]{2\mathrm{e}}}$

---

**Aufgabe 6** (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

**(a)** $\displaystyle\int 10x\sin(5x^2)\,\mathrm{d}\,x \;=\; \boxed{\left[-\cos\left(5x^2\right)\right]}$

**(b)** $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}\,x \;=\; \boxed{\left[2\ln|x+2| + \frac{7}{x+2}\right]}$

**(c)** $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}\,x \;=\; \boxed{\left[\ln\left(x^2+4x+5\right) - 7\arctan(x+2)\right]}$

---

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\;:\;\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\tfrac{1}{3}y^3 - 9y\right).$$

**(a)** Berechnen Sie den Gradienten von $f$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\left(\frac{1}{3}y^3 - 9y\right) \\ (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(y^2-9) \end{pmatrix}}$$

**(b)** Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von $f$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}}\,,\qquad \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}}$$

**(c)** Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f(x,y)$.

$$\mathrm{H}f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\left(\frac{1}{3}y^3 - 9y\right) & (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(y^2-9) \\ (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(y^2-9) & 2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})y \end{pmatrix}}$$

**(d)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{3}\right)$.

$$T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{3}\right) = \boxed{-36 - 18x^2 + 6(y-3)^2}$$

---

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha \;:\; \mathbb{R}\times(-1,+\infty)\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x\ln(y+1)\\ \dfrac{x^2}{y+1}+2z^2\\ \alpha^2 yz+\sin(z)\end{pmatrix}$$

mit $\alpha\in\mathbb{R}$.

**(a)** Bestimmen Sie die Rotation von $g_\alpha$.

$$\operatorname{rot} g_\alpha(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha^2 z - 4z\\ 0\\ 0\end{pmatrix}}$$

**(b)** Für welche Parameter $\alpha$ besitzt $g_\alpha$ ein Potential?

$$\alpha \in \left\{ \boxed{-2, 2} \right\}$$

**(c)** Berechnen Sie für $\alpha = 2$ ein Potential $U$ von $g_2$.

$$U(x,y,z) = \boxed{x^2\ln(y+1)+2yz^2-\cos(z)}$$

---

**Aufgabe 9** (*2 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

Tragen Sie jeweils „konvergent" oder „divergent" in das linke Kästchen ein, und geben Sie im rechten Kästchen ein Kriterium an, aus dem die Konvergenz bzw. Divergenz folgt.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(5n)}}$ ist $\boxed{\text{divergent}}$ nach dem $\boxed{\text{Integral–Vergleichskriterium}}$ .

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5n+2}}$ ist $\boxed{\text{konvergent}}$ nach dem $\boxed{\text{Leibniz–Kriterium}}$ .

---

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /4 | /3 | /4 | /4 | /5 | /4 | /4 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| $f(x)$ | $x^a$ | $\mathrm{e}^x$ | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\,x^{a-1}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\,b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** $\boxed{\phantom{x}}$ **Übungsgruppe:** $\boxed{\phantom{x}}$

---

**Aufgabe 2** (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 4\pi} \frac{x\sin(x)}{\sin(5x)} = \boxed{\frac{4\pi}{5}}$

**(b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x+9}}{\sqrt{x+5}} = \boxed{2}$

**(c)** $\displaystyle\int_3^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}\,x = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$

**(d)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$

**Aufgabe 3** (*3 Punkte*)

**(a)** Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{9+\tfrac{2}{n}}-3\right) = \boxed{\tfrac{1}{3}}$$

**(b)** Geben Sie drei Häufungspunkte $h_1,\ h_2,\ h_3 \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1}{5}\cos(2n!\,\pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$h_1 = \boxed{-\tfrac{4}{5}}$ , $h_2 = \boxed{\tfrac{1}{5}}$ , $h_3 = \boxed{\tfrac{6}{5}}$

---

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*) Die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow (2,8):\ x \longmapsto \frac{8x+2}{x+1}$$

besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1}:\ (2,8) \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Es gilt $f(1)=5$.

**(a)** Berechnen Sie: $f'(x) = \boxed{\dfrac{6}{(x+1)^2}}$ , $(f^{-1})'(5) = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

**(b)** Bestimmen Sie die Tangente $t_1$ an den Graphen von $f$ im Punkt $(1,5)$.

$$t_1\ :\ y = \boxed{\frac{3}{2}}\ x\ +\ \boxed{\frac{7}{2}}$$

**(c)** Bestimmen Sie die Tangente $t_2$ an den Graphen von $f^{-1}:\ (2,8) \longrightarrow \mathbb{R}^+:\ y \longmapsto x = f^{-1}(y)$ im Punkt $(5,1)$.

$$t_2\ :\ x = \boxed{\frac{2}{3}}\ y\ +\ \boxed{-\frac{7}{3}}$$

---

**Aufgabe 5** (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a+b\,\mathrm{i}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

**(a)** $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} 3^k\big((1+3\mathrm{i})z+5\big)^k$ : $z_0 = \boxed{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}}$ , $\rho = \boxed{\dfrac{1}{3\sqrt{10}}}$

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n\, n!}{3^n\, n^n}\big(z+4-2\mathrm{i}\big)^{5n}$ : $z_0 = \boxed{-4+2\mathrm{i}}$ , $\rho = \boxed{\sqrt[5]{3\mathrm{e}}}$

---

**Aufgabe 6** (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

**(a)** $\displaystyle\int 6x\sin(3x^2)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\cos\left(3x^2\right)\right]}$

**(b)** $\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[2\ln|x+2| + \frac{8}{x+2}\right]}$

**(c)** $\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\ln\left(x^2+4x+5\right) - 8\arctan(x+2)\right]}$

---

**Aufgabe 7** (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\tfrac{1}{4}y^3 - 12y\right).$$

**(a)** Berechnen Sie den Gradienten von $f$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\left(\frac{1}{4}y^3 - 12y\right) \\ (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\left(\frac{3}{4}y^2 - 12\right) \end{pmatrix}}$$

**(b)** Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von $f$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

**(c)** Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{H}\,f(x,y)$.

$$\mathrm{H}\,f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\left(\frac{1}{4}y^3 - 12y\right) & (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\left(\frac{3}{4}y^2 - 12\right) \\ (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\left(\frac{3}{4}y^2 - 12\right) & \frac{3}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})y \end{pmatrix}}$$

**(d)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{4}\right)$.

$$T_2\left(f, \binom{x}{y}, \binom{0}{4}\right) = \boxed{-64 - 32x^2 + 6(y-4)^2}$$

---

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha \;:\; \mathbb{R} \times (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x\ln(y+1) \\ \dfrac{x^2}{y+1} + \dfrac{1}{2}z^2 \\ \alpha^2 yz + \sin(z) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

**(a)** Bestimmen Sie die Rotation von $g_\alpha$.

$$\operatorname{rot} g_\alpha(x, y, z) = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha^2 z - z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

**(b)** Für welche Parameter $\alpha$ besitzt $g_\alpha$ ein Potential?

$$\alpha \in \left\{ \boxed{-1, 1} \right\}$$

**(c)** Berechnen Sie für $\alpha = 1$ ein Potential $U$ von $g_1$.

$$U(x, y, z) = \boxed{x^2 \ln(y+1) + \frac{1}{2} y z^2 - \cos(z)}$$

---

**Aufgabe 9** (*2 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

Tragen Sie jeweils „konvergent“ oder „divergent“ in das linke Kästchen ein, und geben Sie im rechten Kästchen ein Kriterium an, aus dem die Konvergenz bzw. Divergenz folgt.

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$ ist $\boxed{\text{konvergent}}$ nach dem $\boxed{\text{Leibniz–Kriterium}}$.

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(2n)}}$ ist $\boxed{\text{divergent}}$ nach dem $\boxed{\text{Integral–Vergleichskriterium}}$.