



**Aufgabe 8** (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

Gegeben sei  $\mathbb{R}^2$  mit Standardkoordinatensystem  $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$ . Ein zweites affines Koordinatensystem  $\mathbb{F}$  ist gegeben durch

$$\mathbb{F} = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right); \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen  ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$  und  ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ :

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto$    $v +$  ,

${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto$    $v +$  .

(b) Für ein drittes affines Koordinatensystem  $\mathbb{G}$  sei

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Koordinatentransformation  ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ :

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto$    $v +$  .

**Aufgabe 9** (3 Punkte)

0 1 2 3

(a) Für welche Werte von  $\gamma \in \mathbb{R}$  ist  $g_\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & \gamma \\ 3 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  eine Isometrie?

(b) Die Matrix  $D = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  beschreibt eine Drehung um eine Drehachse  $g$  im  $\mathbb{R}^3$  mit Drehwinkel  $\alpha$ . Bestimmen Sie  $\cos(\alpha)$  und die Drehachse  $g$ :

$\cos(\alpha) =$  ,  $g =$  .

**Nachklausur zur 2. Scheinklausur**

**Höhere Mathematik 1**

**09.02.2024**

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Matrikelnummer:**

**Gruppe:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

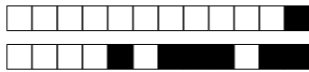
**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Aufgabe 2** (2 Punkte)

0 1 2

Für den Parameter  $\beta \in \mathbb{R}$  sei  $A_\beta = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & \beta + 8 & 0 \\ 2 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ . Für welche Werte von  $\beta$  ist  $A_\beta$  singular?



**Aufgabe 3** (3 Punkte)

0  1  2  3

(a) Bestimmen Sie die Determinante  $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \square$ .

(b) Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mit  $\det(A) = -\frac{1}{6}$ ,  $\det(B) = \frac{5}{3}$ . Berechnen Sie

$\det(-\sqrt{3}A) = \square$ ,  $\det(-\sqrt{3}B^2A) = \square$ .

**Aufgabe 4** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Sei  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gegeben. Die Matrix  $A$  besitzt den Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ .

(a) Bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 von  $A$ .  $d_1 = \square$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert 1 von  $A$ .

$V(1) = \square$

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von  $V(1)$ .

$\square$

**Aufgabe 5** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

(a) Berechnen Sie.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \square$ ,  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \square$

(b) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n := \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{n} - 10n\right)}{n}$ .

$\square$

(c) Geben Sie an, ob die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $b_n := 2^n - (n-1)^2$  monoton wachsend, monoton fallend, oder nicht monoton ist.

$\square$

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Wir betrachten die Quadrik  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T A x + 2a^T x + c = 0\}$  mit

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $c = 7$ .

(a) Bestimmen Sie  $\text{Rg}(A) = \square$

(b) Geben Sie die erweiterte Matrix  $A_{\text{erw}}$  sowie deren Rang an.

$A_{\text{erw}} = \square$ ,  $\text{Rg}(A_{\text{erw}}) = \square$

(c) Welchen Typ hat die Quadrik  $Q$  im Sinne der Grobeinteilung?

$\square$

**Aufgabe 7** (2 Punkte)

0  1  2

Bezüglich des Koordinatensystems

$\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

sei die Quadrik  $Q$  beschrieben durch die Gleichung

$\sqrt{2}y_1^2 + 2y_2 = 0$ .

Skizzieren Sie das Koordinatensystem  $\mathbb{F}$ , sowie die Quadrik  $Q$  in das Standardkoordinatensystem.

