Aufgabe 8 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

Gegeben sei $\mathbb{R}^2$ mit Standardkoordinatensystem $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$. Ein zweites affines Koordinatensystem $\mathbb{F}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \quad v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}},$$

$$ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \quad v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

(b) Für ein drittes affines Koordinatensystem $\mathbb{G}$ sei

$$ {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \quad v \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$:

$$ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} \colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \quad v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}} \, v + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 9 (3 Punkte) 0 1 2 3

(a) Für welche Werte von $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $g_\gamma \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \ v \mapsto \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & \gamma \\ 3 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Isometrie?

$$\boxed{\gamma = -3}$$

(b) Die Matrix $D = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung um eine Drehachse g im $\mathbb{R}^3$ mit Drehwinkel α. Bestimmen Sie $\cos(\alpha)$ und die Drehachse g:

$$\cos(\alpha) = \boxed{-1}, \qquad g = \boxed{\mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** 1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) 0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (2 Punkte) 0 1 2

Für den Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ sei $A_\beta = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & \beta+8 & 0 \\ 2 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. Für welche Werte von β ist A_β singulär?

$$\boxed{\text{Für } \beta \in \{-8, -1\}.}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-36}$.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $\det(A) = -\frac{1}{6}$, $\det(B) = \frac{5}{3}$. Berechnen Sie

$$\det(-\sqrt{3}\,A) = \boxed{-\frac{3}{2}}, \qquad \det(-\sqrt{3}\,B^2 A) = \boxed{-\frac{25}{6}}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben. Die Matrix A besitzt den Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

(a) Bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 von A. $d_1 = \boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert 1 von A.

$$V(1) = \boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $V(1)$.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

(a) Berechnen Sie. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \boxed{\frac{4}{5}}$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \boxed{\frac{1}{20}}$

(b) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{(-1)^n(\frac{1}{n} - 10n)}{n}$.

$\boxed{-10,\ 10}$

(c) Geben Sie an, ob die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := 2^n - (n-1)^2$ monoton wachsend, monoton fallend, oder nicht monoton ist.

$\boxed{\text{monoton wachsend}}$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A\,x + 2\,a^\intercal x + c = 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 7.$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Rg}(A) = \boxed{1}$

(b) Geben Sie die erweiterte Matrix A_{erw} sowie deren Rang an.

$$A_{\text{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}, \quad \mathrm{Rg}(A_{\text{erw}}) = \boxed{3}$$

(c) Welchen Typ hat die Quadrik Q im Sinne der Grobeinteilung?

$\boxed{\text{parabolische Quadrik}}$

Aufgabe 7 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

sei die Quadrik Q beschrieben durch die Gleichung

$$\sqrt{2}\,y_1^2 + 2\,y_2 = 0.$$

Skizzieren Sie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$, sowie die Quadrik Q in das Standardkoordinatensystem.