

Im Wintersemester 2012/13 wurde in der Vorlesung „Höhere Mathematik 1 für Ingenieurstudiengänge“ das folgende Beispiel zusätzlich eingefügt:

3.7.8 Beispiel. Wir betrachten das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegebene inhomogene LGS:

$$[A \parallel b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right], \quad \text{was auf} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{führt.}$$

Der Gauß-Algorithmus kommt ohne Spaltenvertauschung nicht weiter, wir kennzeichnen die Spalten mit Hilfe der Variablennamen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad S_2 \leftrightarrow S_3 : \quad \left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ein letzter Schritt im Gauß-Algorithmus führt jetzt auf

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{— das kann man leicht lösen,} \\ \text{man muss aber auf die Vertauschung} \\ \text{der Variablen achten!}$$

Nach 3.7.6 gilt (mit $\tilde{x} = (x_1, x_3, x_2, x_4)^T$):

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \text{also} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + L \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Hier ist eine *Probe* dringend angeraten!