3.13.7 Lemma. *Für jede quadratische Matrix A gilt* $\det A = \det A^{\mathsf{T}}$.

Beweis. Wir gehen per Induktion nach der Anzahl n der Zeilen vor:

IA Für $n = 1$ stimmen Matrix und Transponierte überein.

IS Jetzt nehmen wir an, dass für jede $(n \times n)$-Matrix die Determinante mit der der Transponierten übereinstimmt.

Es sei A eine quadratische Matrix mit $n+1$ Zeilen. Um die Determinante der Transponierten $A^{\mathsf{T}} = (b_{kj})$ (mit $b_{kj} = a_{jk}$) zu bestimmen, entwickeln wir nach der ersten Zeile: Das Schachbrettmuster der Vorzeichenverteilung ändert sich beim Transponieren nicht. Für die Cofaktoren $\tilde{b}_{kj}$ der Transponierten gilt $\tilde{b}_{kj} = \tilde{a}_{jk}$ [Ind.-Ann.], wir erhalten also $\det A^{\mathsf{T}} = \sum_{\ell=1}^{n+1} b_{1\ell}\, \tilde{b}_{1\ell} = \sum_{\ell=1}^{n+1} a_{\ell 1}\, \tilde{a}_{\ell 1} = \det A$ [nach der ersten Spalte entwickelt]. □

3.14 Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme

Wir sammeln Wissen aus 3.7.6, 3.9.8, 3.10.6, 3.10.7, 3.10.8, 3.12.2 und 3.12.3:

3.14.1 Zusammenfassung. Es sei $A \in \mathbb{K}^{z \times s}$.
Wir betrachten lineare Gleichungssysteme der Form

$$(S_b) \qquad Ax = b \qquad \text{mit rechter Seite} \quad b \in \mathbb{K}^z .$$

1. Jedes *homogene* LGS (S_0) hat (mindestens) eine Lösung, der Lösungsraum $\mathcal{L}(S_0)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^s$ mit $\dim \mathcal{L}(S_0) = s - \operatorname{Rg} A$.
2. Das LGS (S_b) hat für *jede* rechte Seite $b \in \mathbb{K}^z$ *genau eine* Lösung $x \in \mathbb{K}^s$ dann (und nur dann), wenn eine der folgenden (äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist:
   - $s = z$ und $\det A \neq 0$.
   - $s = z$ und $\operatorname{Rg} A = s$.
   - A ist *invertierbar*, hat also eine (Rechts- *und* Links-)Inverse.
3. Im Fall $s = z$ und $\det A = 0$ gibt es rechte Seiten $b \in \mathbb{K}^z$ derart, dass (S_b) *keine* Lösung hat, und es gibt rechte Seiten b derart, dass (S_b) *mehrere* Lösungen hat.
   Für jede rechte Seite dieser Art ist der Lösungsraum $\mathcal{L}(S_b) = v_{\mathrm{sp}} + \mathcal{L}(S_0)$ ein affiner Teilraum parallel zum Lösungsraum $\mathcal{L}(S_0)$ des zugehörigen homogenen Systems (S_0), hat also Dimension $s - \operatorname{Rg} A$. Es gibt weder eine Rechts- noch eine Linksinverse.

4. Im Fall $s \neq z$ kann man keine Determinante benutzen. Es gilt:
   - Falls $\operatorname{Rg} A = z$ so hat das LGS (S_b) für *jede* rechte Seite $b \in \mathbb{K}^z$ *mehrere* Lösungen, der Lösungsraum ist wieder $\mathcal{L}(S_b) = v_{\mathrm{sp}} + \mathcal{L}(S_0)$, hat also Dimension $s - \operatorname{Rg} A = s - z > 0$. In diesem Fall hat A (mehrere) *Rechtsinverse*, aber *keine Linksinverse*.
   - Falls $\operatorname{Rg} A = s < z$ so gibt es rechte Seiten $b \in \mathbb{K}^z$ so, dass (S_b) *keine* Lösung hat, aber es gibt dann auch rechte Seiten b, für die (S_b) eine Lösung hat. Diese Lösung ist dann *eindeutig*. Die Matrix A hat in diesem Fall (mehrere) *Linksinverse*, aber *keine Rechtsinverse*.
   - Falls $\operatorname{Rg} A < \min\{s, z\}$ so gibt es wieder beides: rechte Seiten, für die (S_b) *keine* bzw. *mehrere* Lösungen hat. In diesem Fall hat A *weder Rechts- noch Linksinverse*.
5. Allgemein gilt (siehe 3.9.8): Die Matrix A und die erweiterte Matrix $[A||b]$ haben genau dann denselben Rang, wenn das LGS $Ax = b$ eine Lösung hat.

Jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen endlicher Dimension kann man (nach Wahl von Basen) durch eine Matrix beschreiben, vgl. 3.8.8.

3.14.2 Anwendung auf lineare Abbildungen. Es sei $A \in \mathbb{K}^{z \times s}$.

1. Die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^z\colon x \mapsto Ax$ ist *surjektiv* genau dann, wenn für *jede* rechte Seite $b \in \mathbb{K}^z$ das LGS $Ax = b$ *mindestens* eine Lösung hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Rg} A = z$ gilt. In diesem Fall hat A eine Rechtsinverse.
2. Die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^z\colon x \mapsto Ax$ ist *injektiv* genau dann, wenn für *jede* rechte Seite $b \in \mathbb{K}^z$ das LGS $Ax = b$ *höchstens* eine Lösung hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Rg} A = s$ gilt. In diesem Fall hat A eine Linksinverse.
3. Die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^z\colon x \mapsto Ax$ ist *bijektiv* genau dann, wenn für *jede* rechte Seite $b \in \mathbb{K}^z$ das LGS $Ax = b$ *genau* eine Lösung hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $z = \operatorname{Rg} A = s$ gilt. In diesem Fall hat A eine Inverse.

Ist $\mathbb{K}$ ein *unendlicher* Körper (z. B. $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ wie fast immer bei unseren Untersuchungen), so bedeutet „mehrere“ Lösungen bei einem LGS immer auch „unendlich viele“.