R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

7. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 25. *Untervektorräume*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

(a) Die Menge $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - y + 5z \geqq 0\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) Die Gerade $g = P + \mathbb{R}v$ mit $P, v \in \mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Menge $\left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, cz_1 + dz_2 = 0,\ c,d \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$.

Aufgabe P 26. *Skalarprodukt*

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und $v, w \in V$.

(a) Berechnen Sie $\langle \alpha v + w \,|\, v + \beta w\rangle$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, falls $\langle v \,|\, v\rangle = 4$, $\langle v \,|\, w\rangle = 1$ und $\langle w \,|\, w\rangle = 3$ gelten.

(b) Berechnen Sie $|v - w|^2$, falls $\langle v \,|\, w\rangle = 2$ und $|v + w|^2 = 10$ gelten.

(c) Sei nun $V = \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie eine obere Schranke für $|v+w|^2$, falls $\langle v \,|\, v\rangle = 9$ und $\langle w \,|\, w\rangle = 4$ gelten.

Aufgabe P 27. *Geraden und Ebenen*

Gegeben seien die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^3$:

$$A = (1,-1,1)\,,\ B = (2,0,1)\,,\ C = (0,-1,2)\,.$$

(a) Geben Sie die Ebene, die A, B und C enthält, in Parameterdarstellung an.

(b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt zwischen der in (b) gefundenen Ebene und der Geraden $g = P + \gamma v$, $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $P = (-3,3,0)$ und $v = (1,-1,1)$.

Aufgabe P 28. *Lineare Unabhängigkeit und Basen*

Gegeben seien $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}8\\-1\\6\\0\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Entscheiden Sie:

(a) Sind v_1, v_2 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

(b) Sind v_1, $-v_1$ linear unabhängig? Sind v_1, v_2, $v_1 + v_3$ linear unabhängig?

(c) Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 5.12. – 11.12.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 31. *Untervektorräume*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $U_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x < 2, y \leqq 0\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) $U_2 := \left\{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\operatorname{Pol}\mathbb{R}$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten.

(c) $U_3 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle x \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, z\rangle = 0\right\}$ für festen Vektoren $y, z \in \mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(d) $U_4 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) = 0\}$ ist ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$.

Aufgabe H 32. *Skalarprodukt*

Sei $\operatorname{Pol}_4\mathbb{R} := \left\{\sum_{j=0}^{4} \alpha_j x^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R}\right\}$. Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt auf $\operatorname{Pol}_4\mathbb{R}$:

$\langle p \,|\, q\rangle = \displaystyle\int_0^\beta p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $p, q \in \operatorname{Pol}_4\mathbb{R}$ und $\beta > 0$.

Gegeben seien die folgende Polynome: $p_1(x) = x^2 - x - 1, \quad p_2(x) = 2x - 1$.

(a) Bestimmen Sie $|p_1|^2$, $|p_2|^2$ und $\langle p_1 \,|\, p_2\rangle$.

(b) Für welche β ist $\langle p_1 \,|\, p_2\rangle = 0$?

(c) Sei nun $\beta = 1$. Bestimmen Sie $c_1 \in \mathbb{R}$ und $c_0 \neq 0$ so, dass das Polynom $q(x) = 3x^2 + c_1x + c_0$ die Gleichung $|q - p_2|^2 = |q|^2 + |p_2|^2$ erfüllt.

Aufgabe H 33. *Ebenen und Geraden*

(a) Gegeben seien $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$

- **(i)** An welchem Punkt schneiden sich die Geraden? Bei welchem γ ist dies der Fall?
- **(ii)** Bestimmen Sie die Ebene , die die Geraden g und h_γ enthält.

(b) Gegeben seien die Punkte $A = (5,3,1)$, $B = (7,10,2)$, $C = (9,6,4)$. Berechnen Sie

- **(i)** den Umfang des Dreiecks ABC.
- **(ii)** den Kosinus jedes der Innenwinkel des Dreiecks.

Aufgabe H 34. *Lineare Unabhängigkeit und lineare Hülle*

(a) Sei $w_1 = (3,-1,2) \in \mathbb{R}^3$ und $w_2 = (-10,3,6) \in \mathbb{R}^3$.

- **(i)** Sind w_1 und w_2 linear unabhängig?
- **(ii)** Zeigen Sie, dass $u = (-8,2,20) \in L(w_1,w_2)$ gilt, aber $v = (24,-8,3) \in L(w_1,w_2)$ gilt nicht.

(b) Gegeben seien $v_1 = (1, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i})$, $v_2 = (1+3\mathrm{i}, 4+2\mathrm{i}, 5\mathrm{i})$, $v_3 = (2-\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 3) \in \mathbb{C}^3$. Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, wenn man $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet?

Frischhaltebox

Aufgabe H 35. *Summen*

Vereinfachen Sie soweit wie möglich: $\displaystyle \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{15}\left(\sum_{j=2}^{n+2} \frac{n! \cdot 2^{2-n-j}}{(j-2)!(n-j+2)!}\right).$