R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 29. *Hülle, Erzeugendensystem und Basen*

Gegeben sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie jeweils: Sind die Vektoren

(a) v_1, v_2, v_3 **(b)** v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 **(c)** v_1, v_5

- linear unabhängig?
- ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? Welche Dimension hat die Lineare Hülle L?
- eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe P 30. *Orthonormalbasen*

(a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$, die ein Vielfaches des Vektors $v = \binom{2}{-3}$ enthält.

(b) Handelt es sich bei der berechneten ONB um ein Links- oder Rechtssystem?

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die ein Vielfaches von $w = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ enthält.

Aufgabe P 31. *Vektorprodukt*

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $a \times b$, $(a+b) \times c$ und $\langle a+b \,|\, a \times b \rangle$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren a und b aufgespannt wird.

Aufgabe P 32. *Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB, $(C+D)A$, CD, DC, D^2, $D^\intercal D$, $DD^\intercal$, C^2-D^2 und $(C+D)(C-D)$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 12.12. – 18.12.) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 36. *Vektorraum der Polynome*

Es sei $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ die Menge aller reellen Polynome p mit Grad kleiner oder Gleich 2.

(a) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\operatorname{Pol} \mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_1(X) = 3X^2 + 2X + 6$, $p_2(X) = X - 1$ und $p_3(X) = X^2 + X + 2$ linear unabhängig sind.

(c) Stellen Sie das Polynom $q(X) = X$ als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 dar.

Aufgabe H 37. *Orthonormalsysteme*

Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: u_1, u_2 ist ein Orthonormalsystem.

(b) Konstruieren Sie den Vektor $u_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass $-u_1, u_2, u_3$ ein Rechtssystem ist.

(c) Sei $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Hesse Normalform der Ebene, welche die Punkte P, Q sowie die Gerade $\left\{P + \lambda u_3 \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ enthält.

Aufgabe H 38. *Vektorprodukt*

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Rechenregeln für beliebige Vektoren $u, v, w, \xi \in \mathbb{R}^3$ korrekt sind.

(a) $\langle v \,|\, w \rangle\, u - \langle v \,|\, u \rangle\, w = v \times (u \times w)$

(b) $-\langle v \,|\, w \times w \rangle = \langle v \times u \,|\, w \rangle - \langle v \,|\, u \times w \rangle$

(c) $v \times (u \times w) = u \times (w \times v)$

(d) $\langle v \times u \,|\, w \times \xi \rangle + \langle u \,|\, w \rangle \langle v \,|\, \xi \rangle = \langle v \,|\, w \rangle \langle u \,|\, \xi \rangle + \langle v \,|\, v \times \xi \rangle$

Aufgabe H 39. *Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \cdot (3^n - 1) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ für alle $n \geqq 1$.

(b) Bestimmen Sie B^8.

Frischhaltebox

Aufgabe H 40. *Geometrische Reihe*

Stellen Sie sich vor, Sie befinden sich in der Mitte eines offenen Feldes. Sie gehen 16 Meter nach vorne, drehen sich nach rechts und gehen 8 Meter, drehen sich wieder nach rechts und gehen weitere 4 Meter, und so weiter. Dies geht unendlich weiter. Wenn Sie schließlich unendlich viele Wendungen gemacht haben, wie weit sind Sie dann vom ursprünglichen Ausgangspunkt entfernt?

Hinweis: Betrachten Sie die Wege in einem kartesischen Koordinatensystem und trennen Sie zunächst nach horizontaler und vertikaler Laufrichtung.