R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 33. *Lineare Gleichungssysteme*

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen $M_1 := \{(25, -10, 4, -3)\}$, $M_2 := \mathbb{R}\,(-1, 1, 1, -1)^\intercal$, $M_3 := (-1, 0, 2, 0)^\intercal + \mathbb{R}\,(0, 1, 0, 1)^\intercal$ und $M_4 := \{(-3+t, 4-2t, t, 0), t \in \mathbb{R}\}$ in der Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= -1 \end{aligned}$$

liegen. Bestimmen Sie ferner die Lösungsmenge und entscheiden Sie, ob diese ein affiner Teilraum oder sogar ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe P 34. *Lineare Abbildungen*

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Abbildungen linear?

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto a|x|^b,\ b > 0$

(c) $f_3 : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2,\ \varphi \mapsto (\varphi(ab), \varphi(a-b))^\intercal$

Aufgabe P 35. *Gauß-Algorithmus*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & \alpha & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\left\{x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A_\alpha x = 0\right\}$ in Abhängigkeit von α.

Aufgabe P 36. *Affine Unterräume*

Analog zu $\mathbb{K}^n$ bezeichnen wir eine Teilmenge M eines Vektorraumes V als affinen Unterraum, wenn es einen Untervektorraum $U \subsetneqq V$ und ein $v \in V$ mit $M = v + U$ gibt.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Satz 1.8.7, dass die Teilmenge

$$M := \{p \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \mid p(a) = b\} \subseteq \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$$

ein affiner Untervektorraum von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie seine affine Dimension.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 19.12.24 – 08.01.25) auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 41. *Neujahrspartygerichte*

Für eine Neujahrsparty möchten Sie verschiedene Gerichte zubereiten, die hauptsächlich die folgenden Zutaten benötigen:

- Gericht 1 (35 Port.): 1 kg Hähnchen, 120 g Mehl, 150 g Butter
- Gericht 2 (25 Port.): 2 kg Rindfleisch, 250 g Mehl, 125 g Butter, 125 g frische Kräuter
- Gericht 3 (30 Port.): 2 kg Hähnchen, 100 g Mehl, 100 g Butter

Ihre Vorräte zum 1. Januar 2025 sind 10 kg Hähnchen, 250 g frische Kräuter, 1250 g Butter, 1350 g Mehl, sowie reichlich von allen übrigen Zutaten. Wieviele ganzzahlige Portionen jedes Gerichts können Sie damit maximal zubereiten, wenn Sie Ihre gesamten Hähnchen- und Mehlvorräte aufbrauchen wollen?

Hinweis: Stellen Sie zuerst mit den Informationen über die Hähnchen und das Mehl ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses. Eliminieren Sie anschließend alle nicht realisierbaren Lösungen.

Aufgabe H 42. *Gauß -Algorithmus I*

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Systems $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H 43. *Gauß -Algorithmus II*

Gibt es $\beta \in \mathbb{R}$, für welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \beta+1 & \beta+2 & 3+2\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) genau eine Lösung **(b)** keine Lösung **(c)** mehrere Lösungen

besitzt? Geben Sie bei positiver Antwort auf (a) oder (c) ferner die Lösungsmenge(n) an.

Aufgabe H 44. *Lineare Abbildung*

Gegeben sei die Basis $B: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die Standardbasis $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$. Es sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren von E unter der Abbildung f.

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrizen ${}_Ef_E$ und ${}_Ef_B$ an.

Frischhaltebox

Aufgabe H 45. *Skalarprodukt*

Seien u, v zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Rechnen Sie nach:

(a) $\langle u \,|\, v \rangle = \frac{1}{4}|u+v|^2 - \frac{1}{4}|u-v|^2$.

(b) Gilt $\langle u \,|\, u \rangle = \langle v \,|\, v \rangle$, so sind $u+v$ orthogonal zu $u-v$.