R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

10. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 37. *Linearität, Matrixbeschreibung*

Entscheiden Sie jeweils, ob φ eine lineare Abbildung ist. Geben Sie in in diesem Fall die beschreibende Matrix von φ bezüglich der Standardbasis an.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-z \\ y+2z \\ 3x \end{pmatrix}$

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x-2y \end{pmatrix}$

Aufgabe P 38. *Matrixbeschreibung Polynome*

Es sei $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leqq 3$.
Wir definieren $\mathrm{e}_k := X^k$ und $b_k := \sum_{j=0}^{k} X^j$, für $0 \leqq k \leqq 3$. Dann sind $E\colon \mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ und $B\colon b_0, b_1, b_2, b_3$ Basen von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie das Koordinatentupel von b_k bezüglich E für $k = 0, 1, 2, 3$.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\mathrm{id}_E$ sowie ${}_B\alpha_E$ für

$$\alpha\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}\colon p \mapsto \alpha(p) = p' \,.$$

(c) Es sei α^2 die Komposition $\alpha \circ \alpha\colon \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}\colon q \mapsto (\alpha^2)(q) := \alpha(\alpha(q))$.
Bestimmen Sie sind die Koordinatentupel von $\alpha^2(\mathrm{e}_3)$ und $\alpha^2(b_3)$ bezüglich B.

Aufgabe P 39. *Rang, Invertieren*

Berechnen Sie jeweils den Zeilen- und Spaltenrang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar? Berechnen Sie für die invertierbaren Matrizen jeweils die Inverse.

Aufgabe P 40. *Wahr oder falsch?*

Seien A und B zwei invertierbare reellwertige Matrizen. Entscheiden Sie, ob die gegebenen Sätze wahr oder im Allgemeinen falsch sind:

(a) $A^T + B$ ist invertierbar.

(b) B^{-1} ist invertierbar.

(c) $A + AB$ ist invertierbar.

(d) $(1+\lambda^2)A$ ist invertierbar für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 09.01.-15.01.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 46. *Linearität*

Entscheiden Sie jeweils, welche der nachfolgenden Abbildungen $\mathbb{K}$-linear sind.

(a) $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c-a \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \mathrm{i}\bar{z}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(c) $\gamma : \mathrm{Pol}_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p'(0) + 2p(1)$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\varphi : \mathrm{Pol}_n \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p(0) - 2$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H 47. *Links und Rechtsinverse*

Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie ferner eine Links- oder Rechtsinverse der Matrizen, falls diese existieren.

Aufgabe H 48. *Invertierbarkeit, Kern, Bild*

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 7 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha - 4 \\ 1 & \alpha & 2\alpha + 6 & -\alpha + 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = -1$ das Inverse von A.

(c) Bestimmen Sie für $\alpha = -2$ jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes der Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\colon x \mapsto Ax$.

Aufgabe H 49. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Komposition*

Gegeben seien die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \\ 2x-y \end{pmatrix}$ sowie die Basen $B\colon b_1 := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), b_2 := \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^2$ und $C\colon c_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), c_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), c_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$.
Ferner seien E_2 und E_3 die jeweiligen Standardbasen.
Bestimmen Sie ${}_{E_3}\alpha_{E_2}$, ${}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B$, ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3}$ und ${}_C\alpha_B$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Kreuzprodukt*

Es seien $v := \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $v \times w$ in Abhängigkeit von α.

Wie muss α gewählt werden, damit $\sin \sphericalangle(v, w) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ gilt?