R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 41. *Determinanten*

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 12 & 12 & 13 \\ 11 & 12 & 13 \\ 15 & 17 & 19 \end{pmatrix}, \qquad \mathit{Neo} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(\mathit{Neo})$.
Bestimmen Sie auch die Determinanten von A^2, von $BB^\intercal$ und von $3\mathit{Neo}$.

Aufgabe P 42. *Determinanten*

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Warum ist A invertierbar? Ist A orthogonal? Berechnen Sie die Determinante von $A^{-1}B$.

Aufgabe P 43. *Determinanten und Invertierbarkeit*

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Invertierbarkeit:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & t^2 \end{pmatrix}, \qquad B_t = \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & -1-t & 2 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 44. *Determinanten*

Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ mit Matrizen A, B, C und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Des Weiteren sei D invertierbar.

(a) Berechnen Sie ML mit $L = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -D^{-1}C & E_n \end{pmatrix}$.

(b) Benutzen Sie die Determinante von ML zur Berechnung der Determinante von M.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.01.-22.01.)
auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 51. *Determinante und Rang*

Wir betrachten die Abbildungen $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4}\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & t \\ t & 4 & 4 & 4 \\ 4 & t & 4 & 4 \\ 4 & 4 & t & 4 \end{pmatrix}$,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \det(A(x))$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N} : x \mapsto \operatorname{Rg}(A(x))$.

(a) Ist die Abbildung f linear?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0$?

(c) Bestimmen Sie das Bild $\left\{ g(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ von g.

Aufgabe H 52. *Entwicklungssatz*

Seien $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(2AB)$, ohne den Gauß-Algorithmus zu verwenden.

Aufgabe H 53. *Volumenberechnung*

Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren v_1, v_2 und v_3 durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen V_1 des von v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Spats.

(b) Berechnen Sie das Volumen V_2 des von Av_1, Av_2 und Av_3 aufgespannten Spats.

(c) Berechnen Sie die Determinante von A.

(d) Sei α die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto Ax$. Wie hängen die Determinante von A und die Änderung des orientierten Volumens eines Spats unter der Abbildung α zusammen?

Aufgabe H 54. *Determinanten*

Gegeben sei $x \in \mathbb{R}^+$ sowie die Matrix $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ mit Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie:

(a) $\det(A_t)$, $\det({A_t}^6)$ und $\det(\sqrt{x}\, A_t)$.

(b) Alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t invertierbar ist.

Frischhaltebox

Aufgabe H 55. *Märchenzahlen*

Zeigen Sie induktiv: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit $10^{2n+1} + 1 = 11k$.