T. Holicki, N. Krauß,
R. Schmähl, A. Zvonareva

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2020/21

Präsenzübungen

Aufgabe P 41. *Grenzwerte*

Berechnen Sie jeweils, wenn möglich, den Grenzwert der nachstehenden Folgen

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2n^2-3}{n^2+1}$;

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{100n}{n^2+2} + \sqrt[2^n]{2}$;

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$;

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = 2^{\sqrt{n}}$.

Aufgabe P 42. *Konvergenz mit Bolzano-Weierstraß*

Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass die folgenden Folgen konvergieren.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$;

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_1 = 8$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 3$.

Aufgabe P 43. *Produktfolge*

Finden Sie jeweils Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen so, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert und die Produktfolge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) unbeschränkt ist,

(b) gegen einen reellen Grenzwert konvergiert,

(c) beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Aufgabe P 44. *Konvergenz von Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Wert der Reihe.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{5^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty}\frac{13}{9^{2j-1}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot 7^n - 19\cdot 3^n}{14\cdot 21^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(2-\mathrm{e})^k}$.

(e) $\displaystyle\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{2j+3}$.

Hausübungen

(Abgabe in der ersten Übung zur HM 2, in dann neu eingeteilten ILIAS-Gruppen)

Aufgabe H 45. *Grenzwerte*

Berechnen Sie jeweils, wenn möglich, den Grenzwert der nachstehenden Folgen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$;

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$;

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2}$.

Aufgabe H 46. *rekursiv definierte Folgen und Bolzano-Weierstraß*

Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass die folgenden (rekursiv definierten) Folgen konvergieren.

(a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$

— also $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\ldots$, $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{n Wurzeln}}$

(b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = b_n\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$

— also $b_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

Aufgabe H 47. *Grenzwerte mit Parameter*

Für welche $s \in \mathbb{R}$ divergieren die folgenden Folgen bestimmt gegen $+\infty$?
Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Folgen?
Bestimmen Sie im Fall von Konvergenz auch den Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^4+1}{n^3-2} - \frac{sn^2}{5n+2}$;

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n^2+n^s} - n$.

Aufgabe H 48. *Konvergenz von Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Wert der Reihe.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{3}{4}\right)^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2}{k^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^{3j}}{3^{j+3}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3+2^m}{3^{2m+1}}$.

Zu diesem Blatt gibt es keine Online-Aufgabe.