R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 45. *Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren*

Bestimmen Sie nach dem Schmidtschen Verfahren Orthonormalbasen der folgenden Untervektorräume:

(a) $\mathrm{L}\left((1,2,3)^\intercal,(4,5,6)^\intercal,(7,8,9)^\intercal\right) \subsetneqq \mathbb{R}^3$.

(b) $\mathrm{L}\left((2,1,0,0)^\intercal,(0,-1,4,2)^\intercal,(1,0,2,-2)^\intercal\right) \subsetneqq \mathbb{R}^4$

Aufgabe P 46. *Eigentlich und uneigentlich orthogonale Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ sowie die Abbildungen $\alpha_1\colon v \mapsto A_1 v$ und $\alpha_2\colon v \mapsto A_2 v$.

(a) Welche der obigen Abbildungen sind Isometrien? Welche von diesen sind eigentlich und welche uneigentlich?

(b) Eigentlich orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen. Bestimmen Sie für alle eigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2\}$ den Drehwinkel.

(c) Jede uneigentlich orthogonale Matrix beschreibt eine Spiegelung. Geben Sie für alle uneigentlich orthogonalen Matrizen aus der Menge $\{A_1, A_2\}$ die Spiegelungsachse an.

Aufgabe P 47. *Koordinatenwechsel*

Die Punkte P, Q seien gegeben durch ${}_{\mathbb{E}}P := (4,2)^\intercal$, ${}_{\mathbb{F}}Q := (4,2)^\intercal$ mit

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie:

(a) ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ **(b)** ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ **(c)** ${}_{\mathbb{F}}P$ **(d)** ${}_{\mathbb{E}}Q$.

Aufgabe P 48. *Spiegelung an einer Geraden*

Gegeben ist im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade, die durch die Gleichung

$$x_1 - 2x_2 + 2 = 0$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Geraden durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$ beschrieben wird. Handelt es sich um eine Isometrie? Ist diese eigentlich?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 23.01.-29.01.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 56. *Koordinatentransformation*
Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ affine Koordinatensysteme. Sei ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ für das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$, sowie

$$\begin{aligned} {}_{\mathbb{E}}P &= (1\ \ 0\ \ {-1})^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}Q &= (-3\ \ 4\ \ {-2})^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}R &= (-7\ \ 2\ \ {-1})^{\intercal}, & {}_{\mathbb{E}}S &= (-5\ \ 4\ \ {-1})^{\intercal} \\ {}_{\mathbb{G}}P &= (0\ \ 0\ \ 0)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}Q &= (1\ \ 0\ \ 1)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}R &= (2\ \ 0\ \ 0)^{\intercal}, & {}_{\mathbb{G}}S &= (1\ \ {-1}\ \ 1)^{\intercal}. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

Aufgabe H 57. *Gram-Schmidt für Polynomräume*
Wir betrachten den Raum $\operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich 2, versehen mit der Basis $B\colon\ b_1, b_2, b_3$ mit $b_1(X) = 1$, $b_2(X) = X - 1$ und $b_3(X) = X^2$. Ferner definieren wir ein Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_H$ und eine Norm $\|\cdot\|_H$ für stetig diffenzierbare Funktionen $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mittels

$$\langle f \mid g \rangle_H := \int_{-1}^{1} f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad \|f\|_H := \sqrt{\langle f \mid f \rangle_H}$$

(a) Gewinnen Sie aus B eine Ortonormalbasis $U\colon\ u_1, u_2, u_3$ von $\operatorname{Pol}_2\mathbb{R}$ mit: $\mathrm{L}\,(u_1) = \operatorname{Pol}_0\mathbb{R}$ und $\mathrm{L}\,(u_1, u_2) = \operatorname{Pol}_1\mathbb{R}$.

(b) Geben Sie ${}_B\mathrm{id}_U$ und ${}_U\mathrm{id}_B$ an.

Aufgabe H 58. *Spiegelung*
Eine Spiegelung an einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$. Ist $\alpha \circ \alpha$ eine eigentliche / uneigentliche Isometrie?

(b) Sei E die Ebene durch die Punkte $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Bildebene $E' := \alpha(E) = \left\{\alpha(x) \,\middle|\, x \in E\right\}$ von E unter α in Hesse-Normalform.

(c) Seien $r_1 := (-2\ \ 1\ \ {-2})^{\intercal}$ und $r_2 := (-2\ \ 4\ \ {-2})^{\intercal}$. Für welche $j \in \{1,2\}$ ist die Abbildung $\beta_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av + r_j$ eine Ebenenspiegelung? Geben Sie in diesen Fällen die Spiegelebene in Hesse-Normalform an.

Aufgabe H 59. *Spiegelung*
Gegeben ist im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, die beschrieben wird durch die Gleichung

$$-3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0.$$

Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor t so, dass die Spiegelung an der Ebene beschrieben wird durch die affine Abbildung $x \mapsto Ax + t$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 60. *Nullstellen von Polynomen*
Schreiben Sie die folgenden Polynome als Produkte von Linearfaktoren:

(a) $p(X) = X^2 + \mathrm{i}\,X + 6$ **(b)** $q(X) = X^3 + X - 10$