R. Adarbeh, A. Aulbach,
R. Barthwal, Y. Cheng,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

13. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 49. *Koordinatentransformation*
Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. Weiter seien gegeben

$$ {}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). $$

(a) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{F}}P$ und ${}_{\mathbb{G}}P$.

(b) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$, ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

(c) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

Aufgabe P 50. *Eigenwerte und Eigenräume*
Berechnen Sie die charakteristischen Polynome, die Eigenwerte und die Eigenräume der folgenden Matrizen.

$$ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} $$

Geben sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

Aufgabe P 51. *Eigenwerte, Spur und Determinante*
Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. $$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte mit Hilfe der Spur und der Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.

(d) Berechnen Sie die Spur und die Determinante mit Hilfe der Eigenwerte von B.

Aufgabe P 52. *symmetrische Matrizen*
Gegeben sei

$$ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S so, dass $S^{\mathsf{T}}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 30.01. – 05.02.) auf folgender Webseite.

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 61. *Eigenwerte*

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine komplexe Matrix.

(a) Sei λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass λ^k ein Eigenwert von A^k für $k \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Sei A eine Matrix mit der Eigenschaft $A^m = 0$ für $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A ist.

(c) Sei $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass A nicht invertierbar ist.

Aufgabe H 62. *Parameterabhängige Matrix*

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 1 \\ -1 & t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

Aufgabe H 63. *Koordinatensysteme*

Wir verwenden das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^3$ und betrachten die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(a) Überprüfen Sie, ob $\mathbb{F} = (P; \overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ_2}, \overrightarrow{PQ_3})$ ein affines Koordinatensystem ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

(c) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung mit ${}_{\mathbb{E}}(\alpha(x)) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot {}_{\mathbb{E}}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Matrix B und den Vektor v so, dass ${}_{\mathbb{F}}(\alpha(x)) = B \cdot {}_{\mathbb{F}}x + v$ gilt.

Aufgabe H 64. *Diagonalisierung und Matrixpotenzen*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

(c) Geben Sie eine invertierbare Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und bestimmen Sie $(S^{-1}AS)^4$ sowie A^4.

Frischhaltebox

Aufgabe H 65. *Komplexe Zahlen und Summe*

Es seien $z_1 = \frac{\mathrm{i}}{3}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

Bestimmen Sie: **(a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} z_1^k$. **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\sqrt{k}}{z_2^2 + 2k} - \frac{\sqrt{k+1}}{2 + z_2^2 + 2k} \right)$.