

Präsenzübungen

Aufgabe P 69. Funktionsgrenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Ist die Regel von l'Hospital hilfreich?

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{6x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2+0} e^{\frac{\ln(x)}{x-1}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln(x) \sin(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{\cos(\pi x)}$

Aufgabe P 70. Taylorpolynome

Bestimmen Sie $T_n(f, x, x_0)$ für

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^4 + 3x, n = 3, x_0 = 1.$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto e^{-x^2}, n = 4, x_0 = 0.$

(c) $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (-2x)e^{-x^2}, n = 4, x_0 = 0.$

Aufgabe P 71. Monotonie und Ableitungen

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^4 - x^2 + 1.$

(a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x).$

(b) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen f monoton steigend/fallend ist.

Aufgabe P 72. Mittelwertsatz

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt[4]{x}$$

(a) Bestimmen Sie für f eine Zwischenstelle $\xi \in (1, 16)$ so, dass $f'(\xi) = \frac{f(16)-f(1)}{16-1}$ ist.

(b) Geben Sie, mit Hilfe des Mittelwertsatzes, eine Abschätzung für $\sqrt[4]{260}.$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.05. – 29.05.)
auf folgender Webseite.

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/>



Hausübungen (Abgabe in ILIAS):**Aufgabe H 91.** *Funktionsgrenzwerte*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Ist die Regel von l'Hospital hilfreich?

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, $a > 0$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{\tan(x) - x}$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)|^{1 - \cos(x)}$,
- (d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe H 92. *Mittelwertsatz*

Gegeben sind die Funktionen

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 2x + \sqrt{x-1},$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^{\frac{1}{3}}.$$

- (a) Bestimmen Sie für f eine Zwischenstelle $\xi \in (5, 10)$ so, dass $f'(\xi) = \frac{f(10) - f(5)}{10 - 5}$ ist.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Konstanten $c(n)$ und $C(n)$ so, dass die folgende Grenze gilt:

$$c(n) < g(n+1) - g(n) < C(n).$$

- (c) Ein Autofahrer fährt durch eine Kleinstadt mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 50 km/h. Die Stadt ist 5 km groß. Am Ortseingang zeigt der Tachometer 46 km/h an und die Uhr zeigt 10 : 00 Uhr, am Ortsausgang zeigt der Tachometer 40 km/h an und die Uhr zeigt 10 : 06 Uhr. Einige Wochen später erhält der Fahrer einen Strafzettel per Post. Erklären Sie das.

Aufgabe H 93. *Taylorpolynome*

Gegeben sind die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto e^{-x},$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \arctan(x),$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (f(x) - 1)(g(x) - x).$$

- (a) Bestimmen Sie $T_4(f, x, 0)$, $T_4(g, x, 0)$, $R_4(f, x, 0)$ und $R_4(g, x, 0)$.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a), $T_4(h, x, 0)$, und $R_4(h, x, 0)$. Geben Sie $R_4(h, x, 0)$ in Abhängigkeit von den Ableitungen $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (g(x) - x)$ an (ohne weiter zu vereinfachen).
- (c) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

Aufgabe H 94. *Taylorpolynome*

Gegeben sind die Funktionen

$$f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sinh(2(x-1)).$$

- (a) Bestimmen Sie $T_5(f, x, 0)$ und $R_5(f, x, 0)$.

(b) Bestimmen Sie $T_4(g, x, 1)$ und $R_4(g, x, 1)$.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie n so, dass

$$|f(x) - T_n(f, x, 0)| < \varepsilon$$

gilt für alle $x \in [0, 1]$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 95. *Konvergenz mit Cauchy*

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die folgende Folge konvergiert:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k^2)2^k}.$$