J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

23. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 85. *Topologie*

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x < y+1 \leqq x+2 \right\} \subseteqq \mathbb{R}^2.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

(b) Bestimmen Sie $\overline{M}$, M° und ∂M.

(c) Ist M beschränkt? Kompakt?

Aufgabe P 86. *Folgen in $\mathbb{R}^n$*

Untersuchen Sie die Folge $(a_k)_{k\geqq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie ihren Grenzwert, falls er existiert.

(a) $a_k = \left(\frac{1}{k}, 2\right)^\intercal$

(b) $a_k = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{5^j}{j!}, \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}\right)^\intercal$

(c) $a_k = (k, 2)^\intercal$

(d) $a_k = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2}, \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\right)^\intercal$

Aufgabe P 87. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

Aufgabe P 88. *Visualisierung von Funktionen mehrer Veränderlicher*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t zu den Niveaus $t \in \{1/e^r \mid r = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) Bestimmen Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E_1\colon x = 0$.

(c) Hat f irgendwelche Symmetrien?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 20.06. – 26.06.)
auf folgender Webseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 111. *Topologie*
Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \text{ und } 2x^2 + 3y^2 \leqq 6 \right\},$$

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

(b) Bestimmen Sie $\overline{M}$ und M° und ∂M.

(c) Untersuchen Sie, ob M beschränkt ist.

(d) Untersuchen Sie, ob M kompakt ist.

Aufgabe H 112. *Funktionen mehrerer Veränderlicher I: Warm-up*
Gegeben sei die Funktion $f\colon [-2,2] \times [-2,2] \to \mathbb{R}, (x,y)^\mathsf{T} \mapsto \frac{x^2+1}{y^2+1}$

(a) Ist f stetig? Nimmt f ein globales Maximum an?

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t von f für $t = \frac{1}{2}, 1, 2$

(c) Begründen Sie, warum sich Niveaulinien N_t und N_s für $t \neq s$ niemals schneiden.

(d) Skizzieren Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E\colon x = 2y$.

Aufgabe H 113. *Funktionen mehrerer Veränderlicher II: Stetigkeit*
Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{2\,xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{für } \binom{x}{y} = \binom{0}{0}. \end{cases}$$

Ein Modell für den Funktionsgraphen finden Sie unter
`https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/04/`

(a) Für $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\}$ sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto t\binom{a}{b}$ die Parametrisierung einer Geraden durch den Ursprung. Ist $f \circ g$ stetig?

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.

(c) Ist f stetig in $\binom{0}{0}$?

Aufgabe H 114. *Folgen in* $\mathbb{R}^2$
Finden Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen $(a_k)_{k\geqq 1}$.

(a) $a_k = (\cos(2\pi k/3), \sin(2\pi k/3))^\mathsf{T}$

(b) $a_k = \left(k, \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2}\right)^\mathsf{T}$

(c) $a_k = (2 + \frac{1}{k}, ke^{-k})^\mathsf{T}$

(d) $a_k = \left((-1)^k, \sum_{j=0}^{k} \frac{(-25)^j}{(2j)!}\right)^\mathsf{T}$

Frischhaltebox

Aufgabe H 115.
Bestimmen Sie die affine Normalform der Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3 = 0\}$.