Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 71. *Folgen und Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Häufungspunkte und geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen den Häufungspunkt konvergiert.

(a) $\left(\frac{3(n+1)-n(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{n}{2n+1}\sin\left(\pi\frac{n(-1)^n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Kürzen lässt sich die Folge umschreiben zu

$$\frac{3(n+1)-n(-1)^n}{n} = 3+\frac{3}{n}-(-1)^n.$$

Wir können daher die Folge aufteilen in die Teilfolge aller geraden Folgeglieder

$$a_{2k} = 3+\frac{3}{2k}-1 = 2+\frac{3}{2k} \to 2 \quad \text{für } k\to\infty$$

und die Teilfolge aller ungeraden Folgeglieder

$$a_{2k+1} = 3+\frac{3}{2k+1}-(-1) = 4+\frac{3}{2k+1} \to 4 \quad \text{für } k\to\infty.$$

Folglich sind die Häufungspunkte der Folge genau 2 und 4.

(b) Man betrachte zunächst die Folge $\left(\frac{n}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt hierfür:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Für $n=2k$ gilt $\sin\left(\pi\frac{n(-1)^n}{2}\right) = \sin(k\pi) = 0$ und damit folgt $\lim_{k\to\infty} b_{2k} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$.

Für $n = 4k+1$ gilt dagegen $\sin\left(\pi\frac{n(-1)^n}{2}\right) = -\sin\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und damit $\lim_{k\to\infty} b_{4k+1} = \frac{1}{2}\cdot(-1) = -\frac{1}{2}$.

Schließlich gilt für $n = 4k+3$, dass $\sin\left(\pi\frac{n(-1)^n}{2}\right) = -\sin\left(2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right) = 1$. Damit folgt: $\lim_{k\to\infty} b_{4k+3} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Wir haben nun alle Folgeglieder durch Teilfolge abgedeckt. Damit hat die Folge die Häufungspunkte 0, $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

Aufgabe H 72. *Konvergenzkriterien für Reihen*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k!}+(-1)^k\frac{1}{k}\right)$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^k}{k!}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k^2+k+1}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{3k}-4^k}{11^k}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k!} = 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 3\mathrm{e}$ konvergiert nach 1.8.6 und 1.9.3. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Damit konvergiert wieder nach 1.9.3 auch die vorliegende Reihe. Wir zeigen durch Widerspruch, dass die Reihe nicht absolut konvergieren kann. Denn wäre das der Fall, würde mit 1.9.3 und der Abschätzung

$$\frac{1}{k} = \left|(-1)^k \frac{1}{k} + \frac{3}{k!} - \frac{3}{k!}\right| \leqq \left|(-1)^k \frac{1}{k} + \frac{3}{k!}\right| + \frac{3}{k!}$$

schon folgen, dass die harmonische Reihe konvergiert. Dies ist aber nicht der Fall (vgl. 1.8.5). Also muss unsere Annahme falsch gewesen sein.

(b) Wir prüfen absolute Konvergenz mittels des Quotienten-Kriteriums. Es gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{10^k}{k!}}\right| = \frac{10}{k+1} \to 0 < 1$$

für $k \to \infty$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe damit absolut.

(c) Wir schätzen ab:

$$\frac{k-1}{k^2+k+1} \geqq \frac{k-1}{3k^2} = \frac{1}{3k} - \frac{1}{3k^2} \geqq \frac{1}{6k} \quad \text{für } k \geqq 2.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k}$ divergiert (harmonische Reihe), folgt mit dem Minoranten-Kriterium, dass die Reihe nicht konvergieren kann.

(d) Diese Reihe konvergiert wieder absolut. Mit dem Majoranten-Kriterium schätzen wir gegen die geometrische Reihe ab:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{2^{3k} - 4^k}{11^k}\right| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{3k}}{11^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{11}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{8}{11}} = \frac{11}{3}.$$

Aufgabe H 73. *Potenzreihen*

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k (2x-1)^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Reihe lässt sich als geometrische Reihe umschreiben:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k (2x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (6x-3)^k.$$

Diese konvergiert genau dann, wenn $|6x-3| < 1$ (vgl. 1.8.4). Dies ist erfüllt für $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(b) Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe absolut nach dem Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{\sqrt{k}} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{1-|x|} - 1.$$

Für $x = -1$ erhalten wir die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, diese konvergiert nach dem Leibnizkriterium.

Für $x = 1$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

deshalb divergiert die Reihe in diesem Fall nach dem Minorantenkriterium.

Für $|x| > 1$ bilden die Folgeglieder in der Reihe keine Nullfolge, hier divergiert die Reihe also ebenfalls.

Insgesamt konvergiert die Reihe damit für $x \in [-1, 1)$.

Aufgabe H 74. *Stetigkeit*

Es seien zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2 + x - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & x \leqq -2, \\ -1 & -2 < x \leqq 1, \\ \frac{1}{x-1} & x > 1. \end{cases}$$

Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen

(a) f stetig ist.

(b) g stetig ist.

(c) $f \cdot g$ stetig ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) f ist eine Polynomfunktion und damit stetig in ganz $\mathbb{R}$ (z.B. nach den Grenzwertsätzen für Folgen).

(b) g ist offenbar unstetig an der Stelle $x = -2$. Ebenso ist g unstetig an der Stelle $x = 1$, denn

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty \neq -1 = g(1),$$

obwohl $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

(c) $f \cdot g$ ist automatisch stetig in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, weil sowohl f als auch g dort stetig sind. Die Stellen -2 und 1 müssen dagegen gesondert untersucht werden.

Wir zeigen die Stetigkeit in $x = -2$. Sei dafür $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige, gegen -2 konvergente Folge. Wir stellen zunächst fest, dass die Folge $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, da fast alle Folgeglieder entweder den Wert 2 oder den Wert -1 haben. Andererseits konvergiert $f(x_n) \to f(-2) = 0$ nach Stetigkeit von f. Damit folgt:

$$|f(x_n) \cdot g(x_n)| = |f(x_n)| \cdot |g(x_n)| \leqq C\,|f(x_n)| \to 0$$

für $n \to \infty$ und eine Konstante $C > 0$.

In $x = 1$ ist $f \cdot g$ dagegen unstetig. Um das einzusehen, faktorisieren wir zunächst die Polynomfunktion $f\colon f(x) = (x+2)(x-1)$. Damit folgt, dass $f \cdot g$ für $x > 1$ die Form $f(x)g(x) = x+2$ hat. Wie oben überprüfen wir den Grenzwert für die Folge $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot g\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} + 2 = 3 \neq 0 = 0\cdot(-1) = f(1)g(1).$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 75. *Komplexe Wurzeln*

Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = \mathrm{i}$ und geben Sie sie in der Form $a + b\mathrm{i}$ an.

Lösungshinweise hierzu: Es gilt $\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Hat z in Polarkoordinaten die Form $z = r\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right)$ so gilt

$$z^3 = r^3\left(\cos(3\varphi) + \mathrm{i}\sin(3\varphi)\right)$$

und somit $r = 1$ und $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vgl. 0.4.4. Wir stellen diese komplexen Zahlen nun wieder als reelle Zahlenpaare dar:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\mathrm{i}}{2},\\
z_2 &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\mathrm{i}}{2},\\
z_3 &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}.
\end{aligned}$$