Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 111. *Topologie*

Wir betrachten die Menge

$$M \;=\; \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqq x \leqq 1,\; -f(x) < y \leqq f(x) \right\},$$

wobei $f(x) = (1+x)(1-x)$.

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

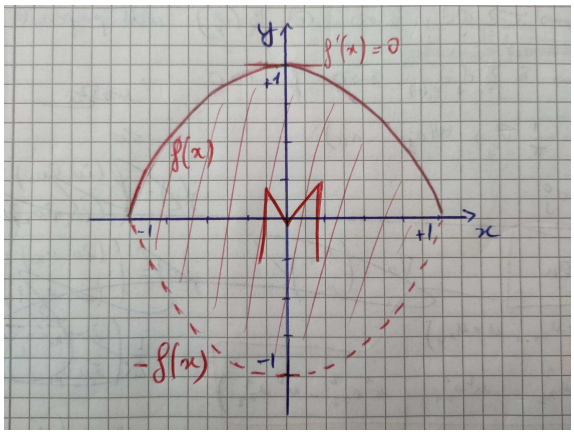
(b) Bestimmen Sie $\overline{M}$ und M° und ∂M.

(c) Untersuchen Sie, ob M beschränkt ist.

(d) Untersuchen Sie, ob M kompakt ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a)



(b) Wir haben

$$\overline{M} = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqq x \leqq 1,\; -f(x) \leqq y \leqq f(x) \right\}.$$

Desweiteren ist

$$M^\circ = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 < x < 1,\; -f(x) < y < f(x) \right\}.$$

Schliesslich, haben wir

$$\partial M = \left\{ \binom{x}{f(x)} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqq x \leqq 1 \right\} \cup \left\{ \binom{x}{-f(x)} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 < x < 1 \right\}.$$

(c) Für alle $\binom{x}{y} \in M$ gilt $|y| \leqq f(x) \leqq 1$ und $|x| \leqq 1$, und wir haben also $|x|^2 + |y|^2 \leqq 2$. Also, $M \subsetneqq U_{\sqrt{2}}(0)$ und folglich ist M beschränkt.

(d) Da M in $\overline{M}$ echt enthalten ist, ist M nicht abgeschlossen. Also ist M nicht kompakt.

Aufgabe H 112. *Integral-Vergleichskriterium*

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie das Integral-Vergleichskriterium anwenden:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [3,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Diese Funktion ist positiv, und ist monoton fallend weil

$$f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3} < 0.$$

Also können wir das Integral-Vergleichskriterium anwenden. Wir berechnen

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)+1}{x}\right]_3^{\beta} < \infty,$$

also konvergiert das Integral und damit auch die Reihe.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [5,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}.$$

Diese Funktion ist positiv, und ist monoton fallend weil $x \mapsto x\ln(x)\ln(\ln(x))$ monoton steigend ist. Also können wir das Integral-Vergleichskriterium anwenden. Wir berechnen, mit $u = \ln(\ln(x))$ und $\mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,x/(x\ln(x))$,

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}\,\mathrm{d}\,x = \int_{\ln(\ln(5))}^{+\infty} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u,$$

also divergiert das Integral und damit auch die Reihe.

Aufgabe H 113. *Funktion in mehreren Variablen I*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien N_t von f für $t=0$ und $t=1$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$

(c) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -\frac{1}{5}$

(d) Kann f in $\binom{0}{0}$ stetig fortgesetzt werden?

Lösungshinweise hierzu:

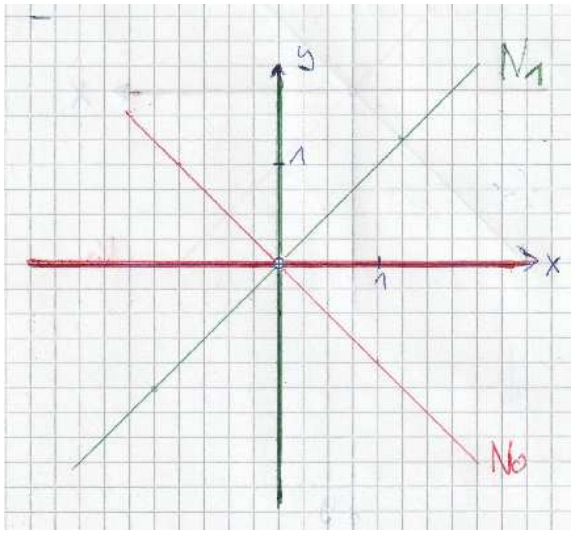
(a) Wir bestimmen zunächst die Niveaulinien, indem wir die Funktion mit dem entsprechenden Niveau gleichstzen. Für das Niveau $t=0$ erhalten wir

$$\frac{xy+y^2}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow xy+y^2 = y(x+y) = 0$$

und somit $N_0 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \;\middle|\; y=0 \quad \text{oder} \quad y=-x \right\}$. Für das Niveau $t=1$ erhalten wir ähnlich

$$\frac{xy+y^2}{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow xy+y^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow xy-x^2 = 0 \Leftrightarrow x(y-x) = 0$$

und somit $N_1 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\binom{0}{0}\right\} \;\middle|\; x=0 \quad \text{oder} \quad y=x \right\}$.



(b) Wir machen uns Aufgabenteil **(a)** zunutze, indem wir eine Folge finden, für welche jedes Folgenglied auf der Niveaulinie N_1 liegt. Dies ist zum Beispeil für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \binom{0}{1/n}$ erfüllt.

(c) Wir nähern uns dem Ursprung entlang einer Ursprungsgeraden, d.h. wir machen den Ansatz $b_n = \binom{1/n}{\lambda/n}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Setzen wir dies in f ein, so erhalten wir

$$f(b_n) = \frac{\lambda\frac{1}{n^2} + \lambda^2\frac{1}{n^2}}{+\frac{1}{n^2} + \lambda^2\frac{1}{n^2}} = \frac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda^2} \overset{!}{=} -\frac{1}{5}.$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner liefert

$$\lambda + \lambda^2 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\lambda^2 \Leftrightarrow 6\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$$

was zu den Lösungen $\lambda = -\frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{3}$ führt. Somit ist durch $b_n = \binom{1/n}{-1/2n}$ eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften gegeben.

(d) Mit **(b)** und **(c)** kann f nicht stetig in $\binom{0}{0}$ fortgesetzt werden, da ansonsten jede gegen $\binom{0}{0}$ konvergente Folge den gleichen Grenzwert liefern müsste, wenn f auf dieser ausgewertet wird.

Aufgabe H 114. *Funktion in mehreren Variablen II*

Gegeben ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R} \colon \binom{x}{y} \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{y - 1}$.

Dabei sei D die Menge aller Elemente von $\mathbb{R}^2$, für welche der Funktionsterm definiert ist.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinie zum Niveau $t = 1$ für $\binom{x}{y}$ im Bereich $[-3, 1] \times [0, 2]$.

(c) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(d) Finden Sie eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \binom{0}{1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 1$.

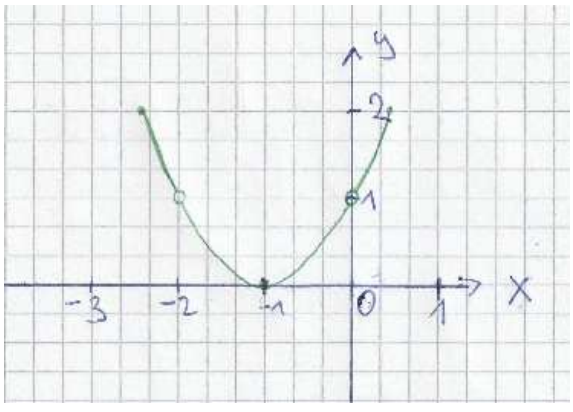
Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \neq 1 \right\}$.

(b) Gleichsetzen des Funktionsausdrucks mit dem Niveau $t = 1$ liefert

$$\frac{x^2 + 2x}{y - 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = y - 1 \Leftrightarrow y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Es handelt sich also um eine Parabel mit Scheitelpunkt $\binom{-1}{0}$:



(c) Da der Zähler nur von x abhängt können wir eine Folge wählen, für welche dieser stets 0 ist und welche gegen $\binom{0}{1}$ konvergiert. Dies ist zum Beispiel für $a_n = \binom{0}{1+1/n}$ erfüllt, denn

$$f(a_n) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und folglich auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(d) Wir benutzen **(b)** und nähern uns dem Punkt $\binom{0}{1}$ auf der Niveaulinie zum Niveau $t = 1$. Als Folge wählen wir $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \binom{1/n}{(1+1/n)^2}$. Diese liegt auf der Niveaulinie und somit gilt $f(b_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit insbesondere auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 1$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 115.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{n^2}{1+n^2}$ und Grenzwert a. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, für welche $|a_n - a| < 10^{-4}$ ist für $n \geqq n_0$.

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$a_n = \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$$

und somit $a = 1$, da der Nenner gegen 1 strebt für $n \to \infty$. Wir betrachten nun die Differenz

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2}{1+n^2} - 1\right| = \frac{1}{1+n^2}.$$

Da $\left(\frac{1}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, reicht es das n_0 zu bestimmen, für welches erstmals gilt:

$$\frac{1}{1+n_0^2} < 10^{-4}.$$

Auflösen nach n_0 führt zu

$$n_0^2 > 10^4 - 1.$$

Die erste natürliche Zahl, welche diese Ungleichung erfüllt ist somit $n_0 = 100 = 10^2$.