Vortragsübung 9

Aufgabe V24 (Potenzreihen verstehen)

Wie sehen Konvergenzmengen einer Potenzreihe der Form $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-i)^j$?

Für Konvergenzradius $\rho = +\infty$, gilt $M = \mathbb{C}$, ansonsten ist der Mittelpunkt bei i, also

$U_{\rho}(i) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-i| < \rho \} \subseteq M \subseteq \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq \rho \}$.

M ist also die offene Kreisscheibe $U_\rho(i)$ vereinigt mit Punkten auf dem Rand

M_1: X nicht kreisförmig

M_2: X Mittelpunkt nicht bei i

M_3: ✓ z.B. $\sum_{n=0}^{\infty} (z-i)^n$,

konvergiert genau dann, wenn $|z-i| < 1$

M_4: X Ellipse, kein Kreis

M_5: X Das Innere des Kreises fehlt

M_6: X Das Innere fehlt.

M_7: ✓ Reihe mit Konvergenzradius $\delta = 0$,

d.h. $\sqrt[n]{|a_n|} \to +\infty$, z.B.

$a_n = n^n$: $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z-i)^n$

M_8: X Es müsste gelten $z_0 = i \in M$

M_9: ✓ z.B. Exp-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$

Aufgabe V25

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{3} i z - \frac{1}{2}\right)^{2n}$$

Generell gilt: Aufgabe muss mit Definition in Einklang gebracht werden

Allgemeine Form:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

$$\frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{3} i z - \frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{3} i \left(z + \frac{3}{2} i\right)\right)^{2n} \Leftrightarrow$$

unsicher? Probe!: $\frac{1}{3} i \left(z + \frac{3}{2} i\right) = \frac{1}{3} i z - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{3} i\right)^{2n}}_{a_{2n}} \cdot \Big(z - \underbrace{\left(-\frac{3}{2} i\right)}_{z_0}\Big)^{2n}$$

Entwicklungspunkt $z_0 = -\frac{3}{2} i$

$(z - z_0)^j$ ist für ungerade j nicht Teil der Reihe, also $a_j = 0$ für j ungerade

$$a_j = \begin{cases} 0 & j \text{ ungerade} \\ \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{3} i\right)^{2n} & j = 2n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & j \text{ ungerade} \\ \frac{\frac{j}{2}+1}{\frac{j}{2}+2} \left(\frac{1}{3} i\right) = \frac{j+2}{j+4} \left(\frac{1}{3} i\right)^j, & j \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\sqrt[j]{|a_j|} = \begin{cases} 0 \\ \underbrace{\sqrt[j]{\frac{j+2}{j+4}}}_{\xrightarrow{j \to \infty} 1} \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$$

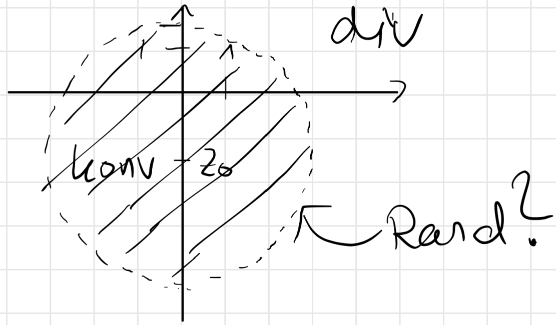
$\xrightarrow{j \to \infty} 1$, weil Sandwichsatz

$$\sqrt[j]{\frac{1}{2}} \leq \sqrt[j]{\frac{j+2}{j+4}} \leq \sqrt[j]{1}$$

$$\sqrt[j]{\frac{1}{2}} \xrightarrow{j \to \infty} 1, \qquad \sqrt[j]{1} \xrightarrow{j \to \infty} 1$$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{3}, \text{ also Konvradius } \rho = 3$$

b) Dank Satz vom Konvergenzkreis wissen wir:



- Die Reihe konvergiert, falls $|z-z_0|<3$.
- Die Reihe divergiert, falls $|z-z_0|>3$
- Wir untersuchen noch die Fälle mit $|z-z_0|=3$, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ mit } b_n := \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{1}{3} i\right)^{2n}(z-z_0)^{2n}$$

und $|b_n| = \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\cdot 3^{2n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\Rightarrow$ b_n ist keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Nullfolgen-Kriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent.

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<3$ und divergiert für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|\geq 3$.

Aufgabe U26

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \longmapsto x^4 - 1$

a) x_0 ist Fixpunkt von f

$\iff f(x_0) = x_0$

$\iff x_0^4 - 1 = x_0$

$\iff x_0^4 - x_0 - 1 = 0$

$\iff$ x_0 ist Nullstellen von

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \longmapsto x^4 - x - 1$

Bisherige Standardverfahren versagen.

Existenz: z.z.: Es gibt einen Fixpunkt/NS

Wie sieht der Funktionsgraph aus?

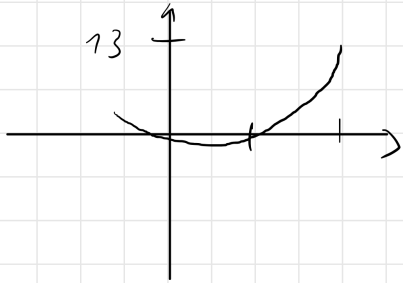
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \infty$

auf $[0,2]$? (Ableitung hilft auch)

$g(0) = -1, \quad g(0{,}5) = \frac{1}{16} - 1{,}5 = \frac{1}{16} - \frac{3}{2} = -\frac{23}{16} \approx -1{,}4$

$g(1) = -1, \quad g(2) = 13$

grobe Skizze



$$g(0) = -1 \leq 0 \leq g(2) = 13$$

g ist stetig, weil Summe stetiger Funktionen

Dank Nullstellensatz von Bolzano besitzt g eine Nullstelle im Intervall $[0,2]$, also f einen Fixpunkt

Eindeutigkeit:

Für $0 \leq x < 1$ ist $g(x) = x^4 - x - 1 < 1 - x - 1$
$= -x \leq 0$ für $x \in [0,1)$

$\Rightarrow g(x) < 0$ für $x \in [0,1)$

$\Rightarrow$ Auf dem Intervall $[0,1)$ besitzt g keine NS.

Es gilt $g(1) = -1 \neq 0$.

$[1, 2]$ Verhalten? Monoton? $g(x) < g(y)$ für $x < y$?

Sei $1 < x < y \leq 2$. Dann folgt

$1 < x^3 < y^3$ und $0 < x - 1 < y - 1$

Daraus folgt:

$$0 < x^3 \cdot (x-1) < y^3(y-1)$$

und daraus $g(x) = x^4 - x - 1 < y^4 - y - 1 = g(y)$

Dank Satz 1.13.11 ist

$g|_{(1,2]} : (1,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$ injektiv,

Daher kann g auf dem Intervall $(1,2]$ höchstens eine Nullstelle besitzen.

$\Rightarrow$ g besitzt höchstens eine NS auf $[0,2]$

Wir wissen weiterhin, dass g auf $[0,2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt (Existenz!)

Daraus folgt, dass f genau einen Fixpunkt auf $[0,2]$ besitzt.

Für welches x_0 gilt $g(x_0)=0$?

b) Wir wissen bereits $g(1)=-1$, $g(2)=13$,

also $x_0 \in [1,2]$.

Intervall halbieren:

$$g(1{,}5) \approx 2{,}56 > 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 \in [1, 1{,}5]$$

Intervall halbieren

$$g(1{,}25) \approx 0{,}19 > 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 \in [1, 1{,}25]$$

Intervall halbieren:

$$g(1{,}125) \approx -0{,}52 < 0$$

$$\Rightarrow x_0 \in [1{,}125, 1{,}25]$$

Also z.B. $\tilde{x} = 1{,}2$ als mögliche Näherung einer Genauigkeit

$$|\tilde{x}-x_0| < \max(0.075, 0.05) = 0{,}075 < 10^{-1}$$

Genauer?: Intervalle weiter halbieren.