VÜ 10

Aufgabe V27: i) zu zeigen mit MWS:

$\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ gilt

$$\ln(x) < x - 1$$

Lösung:

$$\ln(x) < x - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} < x - 1 \qquad | : (x-1)$$

$x > 1$
$\Rightarrow (x-1) > 0$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{\xi}, \text{ für ein } \xi \in (1, x)$$

$\Rightarrow \xi > 1$

$$< 1$$

$\blacksquare$

ii) Zeige nun $\pi^e < e^\pi \qquad | \ln(\cdot)$

$$\Leftrightarrow \ln(\pi^e) < \underbrace{\ln(e^\pi)}_{=\pi}$$

$\ln(\cdot)$ streng monoton wachsend

$$\Leftrightarrow e \ln(\pi) < \pi \qquad | : e$$

$$\Leftrightarrow \ln(\pi) < \frac{\pi}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\pi}{e} \cdot e\right) < \frac{\pi}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\pi}{e}\right) + \underbrace{\ln(e)}_{=1} < \frac{\pi}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\pi}{e}\right) < \frac{\pi}{e} - 1$$

$\blacksquare$

Aufgabe V281

②

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^{(e^x)}$$

$$= \dots = e^{\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x \ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}}$$

NR: Betrachte

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \ln(1-\underbrace{e^{-x}}_{=\frac{1}{e^x}}) \qquad \text{„}0\cdot\infty\text{“}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-e^{-x})}{e^{-x}}$$

„$\frac{0}{0}$“

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1-e^{-x}}\cdot(-e^{-x})\cdot(-1)}{e^{-x}\cdot(-1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{1-e^{-x}} = -\frac{1}{1-0} = -1$$

$\Rightarrow$ (Einsetzen) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^{(e^x)} = e^{\boxed{-1}} = \frac{1}{e}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin(x))^{\frac{1}{\ln(x)}}$

$= \dots = e^{\boxed{\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln(\sin(x))}}$

NR: $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}$

$\overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{=} \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x\cos(x)}{\sin(x)}$

$\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\cos(x) + x\cdot(-\sin(x))}{\cos(x)} = \frac{1+0}{1} = 1$

$\overset{\text{Einsetzen}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0+0} (\sin(x))^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^{\boxed{1}} = e$

Bsp: Versagen von l'Hospital

$\frac{x}{(x+1)^2} \leq \dots \leq \frac{3x}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\overset{x\cdot 1 \leq}{x}\,(2+\cos(x^3))^{\leq x\cdot 3}}{(x+1)^2} = 0 \quad \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}$

aber: $\frac{2+\cos(x^3) + x(-\sin(x^3)\cdot 3x^2)}{2(x+1)}$

$= \frac{2+\cos(x^3)}{2(x+1)} - \frac{3x^3\sin(x^3)}{2(x+1)}$

↑ Limes ex. nicht!

Aufgabe V29 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x \cos(x)$

a) Bestimme Taylorpolynom ~~für~~ $T_3(f, x, \pi)$

$$f(x) = e^x \cos(x)$$
$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x)$$
$$f''(x) = \cancel{e^x \cos(x)} - e^x \sin(x) - e^x \sin(x) \cancel{- e^x \cos(x)}$$
$$= -2e^x \sin(x)$$
$$f'''(x) = -2e^x \sin(x) - 2e^x \cos(x)$$

$$f(\pi) = e^\pi \cos(\pi) = -e^\pi$$
$$f'(\pi) = e^\pi \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - e^\pi \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}$$
$$= -e^\pi$$
$$f''(\pi) = -2e^\pi \sin(\pi) = 0$$
$$f'''(\pi) = -2e^\pi \sin(\pi) - 2e^\pi \cos(\pi)$$
$$= 2e^\pi$$

$$\Rightarrow T_3(f, x, \pi) = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3$$
$$= -e^\pi - e^\pi(x-\pi) + \frac{1}{3}e^\pi(x-\pi)^3$$

b) Finde $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ so, dass

$$|f(x) - T_3(f,x,\pi)| \leq a\,|x-\pi|^4$$

für $x \in [\pi-1, \pi+1]$

$$f(x) - T_3(f,x,\pi)$$
$$= R_3(f,x,\pi)$$
$$= \frac{1}{4!} \cdot f^{(4)}(\xi_{x,\pi})\,(x-\pi)^4$$

Berechne also $f^{(4)}(x) = \cancel{-2e^x \sin(x)} - 2e^x\cos(x)$
$$-2e^x\cos(x) + \cancel{2e^x\sin(x)}$$
$$= -4e^x\cos(x)$$

Es geht jetzt darum, die 4. Ableitung von f auf dem kompakten Intervall $[\pi-1, \pi+1]$ abzuschätzen, da $\xi_{x,\pi}$ zwischen x und π liegt und damit insbesondere $\xi_{x,\pi} \in [\pi-1, \pi+1]$ gilt.

Es ist

$$|f^{(4)}(x)| = |-4e^x\cos(x)|$$
$$= 4e^x \underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1}$$
$$\leq 4e^x \underset{x \in [\pi-1,\pi+1]}{\leq} 4e^{\pi+1}$$

$$\Rightarrow |f(x) - T_3(f,x,\pi)| \leq \frac{1}{4!} 4 e^{\pi+1} |x-\pi|^4$$

$$\leq \frac{1}{6} e^{\pi+1} \quad |x-\pi|^4$$

c) Bestimme $b \in (0,1]$ so, dass

$$|f(x) - T_3(f,x,\pi)| \leq 10^{-4}$$

Nach b) gilt

$$|f(x) - T_3(f,x,\pi)| \leq \frac{1}{6} e^{\pi+1} \underbrace{|x-\pi|^4}_{\leq b}$$

$\forall x \in [\pi - b, \pi + b]$

wähle $b \in (0,1)$ so, dass

$$\frac{1}{6} e^{\pi+1} b^4 < 10^{-4} \quad \Big| : \tfrac{1}{6} e^{\pi+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b^4 < 10^{-4} \cdot 6 \cdot e^{-\pi-1} \quad \Big| \sqrt[4]{\cdot}$$

$b>0$

$$\Leftrightarrow \quad b < \frac{1}{10} \cdot \sqrt[4]{6} \cdot e^{-\frac{\pi+1}{4}}$$