Vortragsübung 11

Aufgabe V30

a) $f(x) = e^{(x^4)}$

$f'(x) = e^{x^4} \cdot 4x^3$

b) $\int x^7 \cdot e^{(x^4)} \, dx$

Substitution mit $u = x^4$

ABER nicht halbherzig ersetzen

$\lightning \quad x^7 \cdot e^u,$

denn dann hätte man gemischte Terme

Zudem muss der Integrand angepasst werden

$$u = x^4$$

$$1 \, du = 4x^3 \, dx$$

$$dx = \frac{1}{4x^3} \, du$$

Zusammen:

$$\int x^7 \cdot e^{x^4} \, dx = \int x^3 \cdot x^4 \cdot e^{x^4} \, dx = \int x^3 \cdot u \cdot e^u \cdot \frac{1}{4x^3} \, du$$

$$= \int \frac{1}{4} u e^u \, du$$

$$\int \frac{1}{4} u \cdot e^u \, du$$

Ableitung wird 1

einfach zu integrieren

$\Rightarrow$ partielle Integration

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$[f \cdot g] = \int f' \cdot g + \int f \cdot g'$$

$$\int f \cdot g' = [f \cdot g] - \int f' \cdot g$$

$$\int \frac{1}{4} \overset{f}{u} \cdot \overset{g'}{e^u} \, du \qquad f' = 1, \; g = e^u$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot u \cdot e^u\right] - \int \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot e^u \, du$$

$$= \left[\frac{1}{4} u e^u - \frac{1}{4} e^u\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} e^u (u-1)\right] = \underline{\underline{\left[\frac{1}{4} e^{(x^4)} (x^4-1)\right]}}$$

Aufgabe V31

a) $$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)\,(3+(\sin(x))^2)}{4\cos(x)-(\cos(x))^2-4}\,dx \;=$$

Nenner: versteckte binom. Formel

$$4\cos(x)-(\cos(x))^2-4$$
$$= -\left((\cos(x))^2-4\cos(x)+4\right)$$
$$= -\left((\cos(x))^2-2\cdot 2\cos(x)+2^2\right)$$
$$= -\left(\cos(x)-2\right)^2$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)\,(3+(\sin(x))^2)}{-(\cos(x)-2)^2} \;=$$

✓ ? ✓

$$u = \cos(x)$$
$$1\,du = -\sin(x)\,dx$$
$$dx = -\frac{1}{\sin(x)}\,du$$

? $3+(\sin(x))^2 =$ immer noch abhängig von x
Zusammenhang mit $u=\cos(x)$?

$$\sin^2+\cos^2=1$$

$$= 3+\left(1-(\cos(x))^2\right) = 4-(\cos(x))^2$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)\,(3+(\sin(x))^2)}{-(\cos(x)-2)^2}\,dx$$

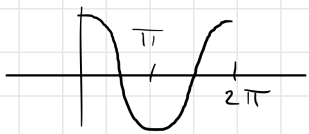
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)\,(4-(\cos(x))^2)}{-(\cos(x)-2)^2}\,dx$$

$$= \int_{u(0)}^{u(\pi)} \frac{\sin(x)\,(4-u^2)}{-(u-2)^2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin(x)}\right) du$$

Die Grenzen ändern sich.
Bei Resubstitution später, reicht diese Formulierung.

$$= \int_{u(0)}^{u(\pi)} \frac{4-u^2}{(u-2)^2}\,du \; =$$

Grenzen genauer:



$$u = \cos(x)$$

$$u_1 = \cos(0) = 1$$

$$u_2 = \cos(\pi) = -1$$

also $\int_1^{-1} \frac{4-u^2}{(u-2)^2}\,du = -\int_{-1}^{1} \frac{4-u^2}{(u-2)^2}\,du$

Alternativ erstmal $\int \dots dx$ ausrechnen

und Grenzen später einsetzen

$$\int \frac{\sin(x)\cdot(3+(\sin(x))^2)}{-(\cos(x)-2)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{4-u^2}{(u-2)^2}\,du = \int \frac{(2-u)(2+u)}{(u-2)^2}\,du$$

$$= \int \frac{-(u-2)(2+u)}{(u-2)^2}\,du = \int \frac{-(2+u)}{u-2}\,du$$

$$= \int -\frac{u+2}{u-2}\,du = -\int \frac{u-2+4}{u-2}\,du$$

$$= -\int \frac{u-2}{u-2} + \frac{4}{u-2}\,du = -\int 1 + \frac{4}{u-2}\,du \quad 4\cdot(u-2)^{-1}$$

$$= -\left[u + 4\cdot \ln|u-2|\right]$$

Alternativ: Resubstitution

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)\,(3+(\sin(x))^2)}{-(\cos(x)-2)^2}\,dx$$

$$= -\int_{1}^{-1} 1 + \frac{4}{u-2}\,du = \int_{-1}^{1} 1 + \frac{4}{u-2}\,du$$

$$= \left[u + 4\cdot\ln|u-2|\right]_{-1}^{1}$$

$$= 1 + 4\cdot\ln|-1| - ((-1) + 4\cdot\ln|-3|)$$

$$= 1 + 4\cdot\ln|1| + 1 - 4\cdot\ln|3|$$

$$= \underline{\underline{2 - 4\cdot\ln(3)}}$$

b) $\int_1^4 \cos(\ln(x))\,dx$

Verschachtelung lässt auf Substitution hoffen.

$$u = \ln(x)$$

$$1\,du = \frac{1}{x}\,dx$$

Cosinus und Sinus verhalten sich zyklisch

$$\cos \xrightarrow{\text{Abl}} -\sin \xrightarrow{\text{Abl}} -\cos$$

$\Rightarrow$ manchmal (NICHT IMMER) hilft zweifache partielle Integration

$$\int \overset{f}{\cos(\ln(x))} \cdot \overset{g'}{1}\,dx$$

$$= \Big[\cos(\ln(x)) \cdot x\Big] - \int -\sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} \cdot x\,dx$$

$$= \Big[\cos(\ln(x)) \cdot x\Big] + \int \overset{f}{\sin(\ln(x))}\,dx \cdot \overset{g'}{1}$$

$$= \Big[\cos(\ln(x)) \cdot x\Big] + \Big[\sin(\ln(x)) \cdot x\Big]$$

$$- \int \cos(\ln(x))\,\frac{1}{x} \cdot x\,dx$$

$$\int \cos(\ln(x))\,dx = \left[\cos(\ln(x))\cdot x + \sin(\ln(x))\cdot x\right] - \int \cos(\ln(x))\,dx$$

$$2\int \cos(\ln(x))\,dx = \left[\cos(\ln(x))\cdot x + \sin(\ln(x))\cdot x\right]$$

$$\int \cos(\ln(x))\,dx = \frac{1}{2}\left[\cos(\ln(x))\cdot x + \sin(\ln(x))\cdot x\right]$$

$$\int_1^4 \cos(\ln(x))\,dx = \frac{1}{2}\left[\cos(\ln(x))\cdot x + \sin(\ln(x))\cdot x\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\cos(\underbrace{\ln(4)}_{=\ln(2^2)})\cdot 4 + \sin(\ln(4))\cdot 4\Big)$$

$$- \frac{1}{2}\Big(\cos(\ln(1))\cdot 1 + \sin(\ln(1))\cdot 1\Big)$$

$$= 2\Big(\cos(2\cdot\ln(2)) + \sin(2\cdot\ln(2))\Big)$$

$$- \frac{1}{2}\Big(\cos(0) + \sin(0)\Big)$$

$$= 2\cdot\Big(\cos(2\cdot\ln(2)) + \sin(2\cdot\ln(2))\Big) - \frac{1}{2}$$

Aufgabe V 32

$$\int \frac{x^4+2}{x^3-x}\,dx$$

Zählergrad > Nennergrad

zu $\int \frac{q(x)}{p(x)}$ finde $a(x)$ und $q_1(x)$

sodass $q(x) = a(x)\,p(x) + q_1(x)$

$$x^4+2 = a(x)\cdot(x^3-x) + q_1$$
$$= x\cdot(x^3-x) + q_1$$
$$= x^4 - x^2 + q_1$$
$$= x^4 - x^2 + x^2 + 2$$

Im Prinzip Polynomdivision mit Rest

$$\Rightarrow \quad a(x) = x, \quad q_1(x) = x^2+2$$

$$\int \frac{x^4+2}{x^3-x}\,dx = \int \frac{x\cdot(x^3-x)+x^2+2}{x^3-x}\,dx$$

$$= \int x\,dx + \int \frac{x^2+2}{x^3-x}\,dx$$

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-x}\,dx = \int \frac{x^2+2}{x(x+1)(x-1)}\,dx$$

Zähler $\neq 0$ für Nullst. vom Nenner

Ansatz: $\int \frac{x^2+2}{x(x+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}\,dx$

Mit Nenner durchmultiplizieren

Ansatz für Fall 1: einfache reelle Nullstellen

$$x^2+2 = A\cdot(x+1)(x-1)+Bx\cdot(x-1)+Cx(x+1)$$
$$= Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx$$
$$1\cdot x^2+0x+2 = (A+B+C)x^2+(-B+C)x-A$$
$$A+B+C=1$$
$$-B+C=0 \Rightarrow B=C$$
$$-A=2 \Rightarrow A=-2$$
I mit $A=-2$ und $B=C$
$$-2+C+C=1$$
$$2C=3$$
$$C=\frac{3}{2}=B$$
$$\Rightarrow \int \frac{x^4+2}{x^3-x}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{x^2+2}{x^3-x}\,dx$$
$$= \int x\,dx + \int \frac{-2}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1|\right]$$

b) $$\int \frac{5x^3 - x^2 - x - 3}{x^4 + x^3 + 3x^2}\,dx$$

$$x^4 + x^3 + 3x^2 = x^2 \cdot \underbrace{(x^2 + x + 3)}_{=0}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} \quad (<0) \quad ↯$$

$x = 0$ keine Nullstelle des Zählers

theoretisch noch überprüfen für komplexe Nullstellen

Fall 2: mehrfache Nullstelle

Fall 3: komplexe Nullstellen

Ansatz:

$$\int \frac{5x^3 - x^2 - x - 3}{x^2 \cdot (x^2 + x + 3)} = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 3}\,dx$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner

$$5x^3 - x^2 - x - 3 = Ax \cdot (x^2 + x + 3) + B(x^2 + x + 3) + (Cx + D)\,x^2$$

$$= Ax^3 + Ax^2 + 3Ax + Bx^2 + Bx + 3B + Cx^3 + Dx^2$$

$$5x^3 - 1x^2 - 1x - 3 = (A + C)x^3 + (A + B + D)x^2 + (3A + B)x + 3B$$

$$\begin{aligned} A + C &= 5 \quad \Rightarrow C = 5 \\ A + B + D &= -1 \quad \Rightarrow D = 0 \\ 3A + B &= -1 \quad \Rightarrow A = 0 \\ 3B &= -3 \quad \Rightarrow B = -1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{5x^3 - x^2 - x - 3}{x^2 \cdot (x^2 + x + 3)} = \int \frac{0}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{5x + 0}{x^2 + x + 3}\, dx$$

$$= \int -\frac{1}{x^2} + \underline{\frac{5x}{x^2 + x + 3}}\, dx$$

$$\frac{5x}{x^2+x+3} = 5\left(\frac{x}{x^2+x+3}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{2x}{x^2+x+3}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(\underbrace{\frac{\overbrace{2x+1}^{=u'}}{x^2+x+3}}_{\text{Substitution } u = x^2+x+3} + \frac{-1}{x^2+x+3}\right)$$

$$\int -\frac{1}{x^2+x+3}\, dx = \int \frac{1}{(\underbrace{x + \frac{1}{2}}_{\text{Subst} := v})^2 + \frac{11}{4}}\, dx = \int \frac{1}{v^2 + \frac{11}{4}}\, dv$$

$$= \int \frac{\frac{4}{11}}{\frac{4}{11} \cdot v^2 + 1}\, dv \overset{w = \frac{2v}{\sqrt{11}}}{=} \int \frac{\frac{4}{11}}{w^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2}\, dw$$

$$dw = \frac{2}{\sqrt{11}}\, dx$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{11}} \frac{1}{w^2+1} \cdot dw = \left[\frac{2}{\sqrt{11}} \arctan(w) \right]$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{2v}{\sqrt{11}} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\int \frac{5x^3 - x^2 - x - 3}{x^2 \cdot (x^2+x+3)} \overset{PBZ}{=} \int -\frac{1}{x^2} + \frac{5x}{x^2+x+3} \, dx$$

$$= -\int \frac{1}{x^2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx + \frac{5}{2} \int \frac{-1}{x^2+x+3} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x} \right] + \frac{5}{2} \left[\ln|u| \right]_{u=x^2+x+3} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}} \right)$$

$$= \left[-\frac{1}{x} + \frac{5}{2} \ln|x^2+x+3| + \frac{5}{\sqrt{11}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}} \right) \right.$$