Vortragsübung 12

Aufgabe V34

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine diffbare Funktion und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Da f stetig ist, folgt aus dem Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung, dass es eine diffbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so gibt, dass $F(x) - \underbrace{F(a)} = \int_a^x f(t)\,dt$ für bel $a, x \in \mathbb{R}$.

Für $G(x) := \int_0^{g(x)} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, gilt also insbesondere dass

$$G(x) = F\big(g(x)\big) - F(0)$$

$F(x)$ und $g(x)$ sind beide diffbar, also nach der Kettenregel auch $G(x)$ und es gilt:

$$G'(x) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

b) Sei $F(x) := \int_0^{(\sin(x))^2} \arcsin(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{(\cos(x))^2} \arccos(\sqrt{t})\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Können wir a verwenden? Voraussetzungen erfüllt?

1. Überprüfen der Grenzen

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq (\sin(x))^2 \leq 1$ und $0 \leq (\cos(x))^2 \leq 1$. Wir betrachten die Integrale also über $[0,1]$.

2. Sind die Integranden über $[0,1]$ stetig?

Die Funktion $t \mapsto \sqrt{t}$ ist auf $[0,1]$ definiert, stetig und nimmt Werte zwischen $[0,1]$ an.

Sowohl arcsin als auch arccos haben $[-1,1]$ als Definitionsintervall und sind auf diesem Intervall stetig.

Die Integranden sind also wohldefiniert und stetig.

(Es existieren auch stetige Fortsetzungen der Funktionen auf der ganzen reellen Achse.)

3. Da die reellen Funktion $x \mapsto (\sin(x))^2$ und $x \mapsto (\cos(x))^2$. auf $\mathbb{R}$ beide diff'bar sind, sind alle Voraussetzungen erfüllt und wir können Teilaufgabe a verwenden.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin(x))^2 &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \frac{d}{dx}(\cos(x))^2 &= -2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}\right\} \text{Kettenregel}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \cdot \arcsin\left(\sqrt{(\sin(x))^2}\right) \\ &\quad -2\sin(x)\cos(x) \cdot \arccos\left(\sqrt{(\cos(x))^2}\right) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\left(\arcsin(|\sin(x)|) \right. \\ &\qquad \left. - \arccos(|\cos(x)|)\right) \end{aligned}$$

Es gilt außerdem (für $x \in \mathbb{R}$)

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

Die Funktionen $x \mapsto \arcsin(|\sin(x)|)$ und $x \longmapsto \arccos(|\cos(x)|)$ sind also gerade und π-periodisch.

Die Funktionen sind also auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ vollständig festgelegt.

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$\arcsin(|\sin(x)|) = \arcsin(\sin(x)) = x$

und $\arccos(|\cos(x)|) = \arccos(\cos(x)) = x$

und deshalb

$$\arcsin(|\sin(x)|) - \arccos(|\cos(x)|) = 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt, dass $F'(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

c) $F(0) = \int_0^0 \arcsin(\sqrt{t})\,dt + \int_0^1 \arccos(\sqrt{t})\,dt$

$= \int_0^1 \arccos(\sqrt{t})\,dt$

Lösung durch Substitution:

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \longmapsto (\cos(u))^2 = h(u)$

Diese diffbare Funktion bildet das Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ bijektiv und fallend auf $[0,1]$ ab und es gilt, dass $h'(u) = -2\cos(u)\sin(u), u \in \mathbb{R}$.

Mit Hilfe der Substitution $t = h(u)$ ergibt sich

$$\int_0^1 \arccos(\sqrt{t})\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 u(-2\cos(u)\sin(u))\, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cdot \sin(2u)\, du$$

weil $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$ für $u \in \mathbb{R}$

und $\arccos(|\cos(u)|) = \arccos(\cos(u)) = u$

für jedes $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin(2u)\, du = \left[-\frac{u}{2} \cos(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)\, du$$

$$= \left[-\frac{u}{2} \cos(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{4} \cos(\pi) - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Also $F(0) = \frac{\pi}{4}$

Da zusätzlich $F'(x)=0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, folgt, dass F konstant ist und dass $F(x) = \frac{\pi}{4}$ für $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe V35

$$f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot (n+2)}$$

a) Quotientenkriterium $a_n = \frac{1}{n! \cdot (n+2)}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n! (n+2)}{(n+1)! (n+3)} = \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Also $\rho = +\infty$

b) Dank Satz 3.8.4 können wir die Reihe gliedweise integrieren

$$\int f(x)\, dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot n! \cdot (n+2)} \right]$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \right]$$

Für $x = 0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} = 0$,

für $x \neq 0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$

$$= \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{x} \left(e^x - 1 - x \right)$$

Also

$$\int f(x)\,dx = \left[F(x)\right] \text{ mit } F(x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ \dfrac{e^x-1-x}{x} & , x\neq 0 \end{cases}$$

c) Die Ableitung der Stammfunktion $F(x)$ ist $f(x)$, also $f(x) = F'(x)$

Für $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{(e^x-1)\cdot x - (e^x-1-x)}{x^2} = \frac{e^x x - x + x - e^x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

Für $x=0$:

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!\cdot(n+2)} = \frac{\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{0^0}}{2} = \frac{1}{2}$$

weil $x^0 = 1$

Aufgabe V 36

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

(Randnotiz: Das Integral gehört zur Gauß-Verteilung, also $= 1$)

Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ def und stetig.

Majorantenkriterium

$$e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} \geq \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{2}{t^2}$$

Da $\int_1^{\infty} \frac{c}{t^2} \, dt$ $(c \in \mathbb{R})$ konvergiert, konvergiert auch $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

Ähnlich konvergiert auch $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

Das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$ existiert nach Stetigkeit des Integranden.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{\infty}$$

konvergiert!

ii) $$\int_0^2 \frac{\sin(x) + (\sqrt{x})^3}{x^2 + (\sqrt{x})^5}\, dx$$

Das Problem ist die linke Grenze $x=0$. An dieser Stelle ist der Integrand nicht definiert (Nenner wäre $=0$).

Vermutung:
$\sin(x)$ verhält sich für $x \to 0$ ungefähr wie x, der gesamte Bruch ungefähr wie $\frac{\sin(x)}{x^2}$, also wie $\frac{1}{x}$

Grenzwertkriterium

$$f(x) = \frac{\sin(x) + (\sqrt{x})^3}{x^2 + (\sqrt{x})^5}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Dann ist $$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x\sin(x) + (\sqrt{x})^5}{x^2 + (\sqrt{x})^5}$$

kürzen mit x^2 $$= \lim_{x \to 0+} \frac{\overbrace{\frac{\sin(x)}{x}}^{\to 1} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1$$

nach L'Hospital

Somit haben $\int_0^2 f(x)\,dx$ und $\int_0^2 g(x)\,dx$

dasselbe Konvergenzverhalten.

Da $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$ divergiert, divergiert

das gesuchte Integral $\int_0^2 f(x)\,dx$.

v) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{x}\cdot\left(\frac{1}{2x}-1\right)dx$

zuerst iii und iv, weil „iii + iv = v"

Stammfunktion ?

$$\int e^{-x}\sqrt{x}\cdot\left(\frac{1}{2x}-1\right)dx$$

$$= \int e^{-x}\frac{\sqrt{x}}{2x} - \int e^{-x}\sqrt{x}\,dx$$

Partielle Int vom ersten Teil

$$\int e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[e^{-x}\sqrt{x}\right] - \int -e^{-x}\sqrt{x}\,dx$$

Also

$$\int e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) dx$$

$$= \left[e^{-x}\sqrt{x}\right] - \int \cancel{-} e^{-x}\sqrt{x}\, dx + \int \cancel{-} e^{-x}\sqrt{x}\, dx$$

$$= \left[e^{-x}\sqrt{x}\right]$$

iii) $$\int_0^1 e^{-x}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2x} - 1\right) dx = \lim_{a \to 0+} \left[e^{-x}\sqrt{x}\right]_a^1$$

$$= \lim_{a \to 0+} e^{-1} - e^{-a}\sqrt{a} = e^{-1}$$

$$\int_1^\infty e^{-x}\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2x} - 1\right) dx = \lim_{b \to \infty} \left[e^{-x}\sqrt{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b \to \infty} e^{-b}\sqrt{b} - e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

l'Hospital $$\lim_{b \to \infty} \frac{\sqrt{b}}{e^b} = \lim_{b \to \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{b}}}{e^b} = 0$$

v) Zusammen:

$$\int_0^\infty \dots dx = \int_0^1 \dots dx + \int_1^\infty \dots dx$$

$$= e^{-1} - e^{-1} = \underline{\underline{0}}$$