Vortragsübung 14

Aufgabe V40

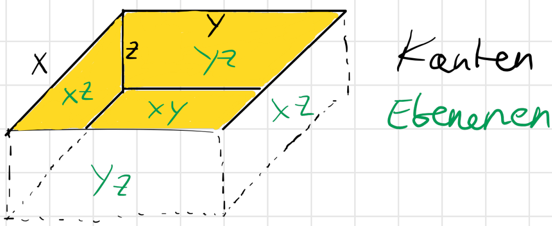
Extremwert unter Nebenbedingungen

a) • Keine Seite sollte extrem lang oder kurz sein.

• Vermutlich gibt es ein eindeutiges Maximum.

• Länge und Breite sind austauschbar, genauer: „symmetrisch“, also $x = y$

b) Skizze:



Maximiere $f: \mathbb{R}^3_{\geq 0} \to \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x \cdot y \cdot z \; (= V)$

unter der Nebenbedingung

$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ mit

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xy + 2xz + 2yz - 108 = 0$$

c) $\operatorname{grad} f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix}$

$\operatorname{grad} g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+2z\\x+2z\\2x+2y\end{pmatrix}$

Beachte: $\operatorname{grad} g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(weil II in I: $y-x=0$ & zu III: $2x+2y=0$)

d.h. auf der Nullstellenmenge von g ist $\operatorname{grad} g \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Das ist eine Voraussetzung für die Multiplikatormethode nach Lagrange

Wir erhalten die vier Gleichungen:

$\operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} g = 0$
$$\begin{cases} 1) & yz + \lambda\cdot(y+2z) = 0 \\ 2) & xz + \lambda(x+2z) = 0 \\ 3) & xy + \lambda(2x+2y) = 0 \end{cases}$$

g
$$4) \quad xy + 2xz + 2yz = 108$$

d) **Tipps zum Lösen solcher Gleichungssysteme:**

- Terme faktorisieren, dann Satz vom Nullprodukt und Fallunterscheidung. $(\ldots)\cdot(\ldots)=0$, dann muss einer der Faktoren 0 sein.
- Auflösen nach Variablen und Einsetzen (Stichwort: „Einsetzungsverfahren")
- Geeignet Gleichungen addieren/subtrahieren, sodass Terme wegfallen (Stichwort: „Additionsverfahren")
- Den Überblick behalten!!!
- Viel üben! :)
- Warnung: Lösungen müssen alle Gleichungen erfüllen.

immer noch d)

In 1) und 2) taucht $2\lambda z$ auf,

also **Subtrahieren**

1) − 2) $\quad yz - xz + \lambda \cdot (y + 2z) - \lambda(x + 2z) = 0$

$$yz - xz + \lambda y - \lambda x = 0$$

Faktorisieren

$$(y - x)z + \lambda(y - x) = 0$$

$$(y - x)(z + \lambda) = 0$$

Satz vom Nullprodukt

Entweder **Fall 1**: $(y - x) = 0$, also $x = y$

oder **Fall 2**: $(z + \lambda) = 0$, also $z = -\lambda$

Fall 1: $\quad x = y$

in 3): $\quad x^2 + \lambda 4x = 0$

$$x \cdot (x + \lambda 4) = 0$$

SvN

$\Longrightarrow$ **Fall 1a** $\quad x = 0$

Fall 1b $\quad x + 4\lambda = 0$

Fall 1a:

$x=0$, da Fall 1 $x=y$: $y=0$

ABER: $xy+2xz+2yz=0\neq 108$ ↯

Fall 1b:

$x=-4\lambda$, mit Fall 1: $x=y=-4\lambda$,

einsetzen in 1)

$$-4\lambda\cdot z+\lambda(-4\lambda+2z)=0$$
$$-4\lambda z-4\lambda^2+2\lambda z=0$$
$$-2\lambda z-4\lambda^2=0$$
$$\lambda\cdot(-2z-4\lambda)=0$$

SvN

$\Rightarrow$ **Fall 1 b I : $\lambda=0$**

Fall 1 b II : $-2z-4\lambda=0$

Fall 1bI: $\lambda=0 \overset{1/2/3}{\Rightarrow} x=y=0$ ↯

Fall 1bII: $z=-2\lambda$, bzw. $2z=-4\lambda$

und weil Fall 1b: $x=y=-4\lambda$

gilt: $x=y=2z$

In 4) eingesetzt ergibt sich

$$x^2 + x^2 + x^2 = 108$$

$90 + 18$

$$3x^2 = 108 \quad | :3$$

$$x^2 = 36 \quad | \sqrt{\ }$$

$$x = +6$$

weil in 1 6 III gilt $x = y = 2z$, $z = -2\lambda$

folgt: $x = 6 = y$

$$z = 3$$

$$\lambda = \frac{z}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Probe: Einsetzen in 1 - 4:

Es handelt sich tatsächlich um eine kritische Stelle.

Fall 2: $z = -\lambda$ in 1) einsetzen

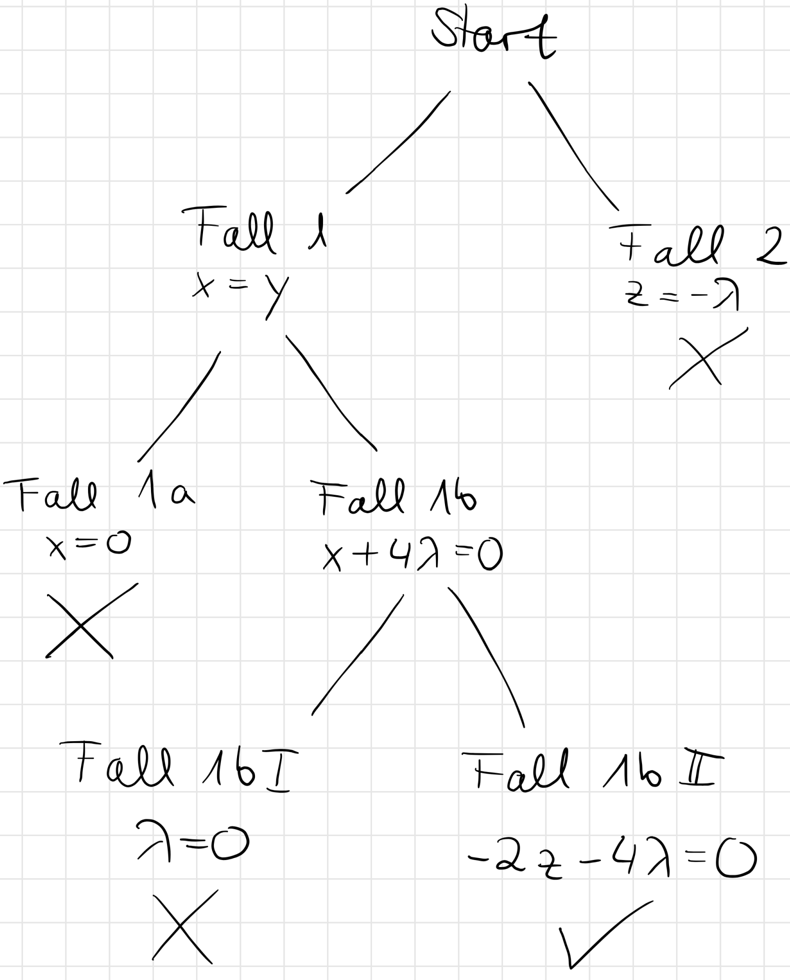
$$0 = yz + \lambda(y + 2z) = -\lambda y + \lambda(y - 2\lambda) = 0$$

$$-2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow z = 0$$

Aus 3) folgt $xy = 0$, somit

$$xy + 2xz + 2yz = 0 \neq 108 \quad ↯$$

Um den Überblick zu behalten, kann man sich auch ein Diagramm malen.



Wir haben eine eindeutige kritische Stelle gefunden:

$x = y = 6,\ z = 3,\ \lambda = -\frac{3}{2}$ mit Volumen

$f\begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix} = 6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$

e) Es gilt $xy + 2xz + 2yz = 108$.

Daraus folgt:

$xy,\ 2xz,\ 2yz \leq 108$, also

$y \leq \frac{108}{x},\ z \leq \frac{54}{x}$ und daher

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = xyz \leq x \cdot \frac{108}{x} \cdot \frac{54}{x} = \frac{108 \cdot 54}{x}$$

Für $x \geq 100$ ist daher

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \leq 108 \cdot \frac{54}{100} < 108$$

Für $y \geq 100$ funktioniert die Argumentation genauso („Symmetrie")

Für $z \geq 100$: $x \leq \frac{54}{z},\ y \leq \frac{54}{z}$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \leq \frac{54^2}{z} = \frac{27^2}{25} < 108$$

f) Die Menge $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; 0 \leq x, y, z \leq 100, \; g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$

ist kompakt, weil beschränkt & abgeschlossen.

Daher nimmt die stetige Funktion $f|_K$ auf K ein Maximum an.

(4.2.18. Satz vom Minimum & Maximum)

Kandidaten dafür sind

- kritische Punkte in K,
  also $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $f\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 108$
- Randpunkte mit $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 100$, $y = 100$ oder $z = 100$.

  Für $x/y/z = 100$ haben wir in e $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} < 108$ gezeigt.

Deshalb ist $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ das eind. Maximum in K. Da außerhalb von K die Funktionswerte kleiner sind (siehe e)), ist $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ insgesamt das Maximum mit max Volumen 108.

Aufgabe V4 1

1.) Bestimme $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $f_{s,t}$ ein Potential besitzt.

2 Möglichkeiten

1. Mögl. Aus Satz 5.1.5 folgt:

$\exists$ Potential, falls J_f symmetrisch

(Vor. Gebiet ist einfach zusammenhängend. Das gilt für $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, da konvex)

Berechne Jacobimatrix J_f:

$$J_f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 4x^3y^{-1} & 0 \\ s^4 \cdot 4x^3 \cdot y^{-1} & * & ste^{-2y} \\ 0 & -2e^{-2y} & * \end{pmatrix}$$

sym, falls:

$$s^4 \cdot 4x^3 \cdot y^{-1} = 4x^3y^{-1} \Rightarrow 4x^3y^{-1}(s^4-1) = 0$$

$$-2e^{-2y} = ste^{-2y} \Rightarrow e^{-2y}(st+2) = 0$$

$$\Rightarrow s^4 = 1 \Rightarrow s \stackrel{!}{=} \pm 1$$

und $st = -2$

für $s=1$: $t=-2$; für $s=-1$: $t=2$

$\Rightarrow$ Für $(s,t) = (1,-2)$ und

$(s,t) = (-1,2)$

existieren Potentialfunktionen

2. Möglichkeit

$$f_{s,t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 \ln(y) \\ s^4 x^4 y^{-1} + st\cdot ze^{-2y} \\ e^{-2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f_{s,t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2e^{-2y} - ste^{-2y} \\ 0 \\ s^4 4x^3 y^{-1} - 4x^3 y^{-1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ für $(s,t) = (\pm 1, \mp 2)$ $\exists$ Pot.

Beachte:

Aus der Existenz eines Potentials folgt immer rot $= 0$

Äquivalenz gilt nur, wenn D einfach zusammenhängend ist.

2.) Bestimme jeweils ein Potential für $(s,t) = (-1,2)$ und $(s,t) = (1,-2)$

Es reicht aus ein Potential für $(s,t) = (1,-2)$ zu bestimmen, da $f_{-1,2} = f_{1,-2}$

Ansatz: $\nabla u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f_{1,-2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u \\ \frac{\partial}{\partial y} u \\ \frac{\partial}{\partial z} u \end{pmatrix} \right)$

$$u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \int 4x^3 \ln(y)\,dx = x^4 \cdot \ln(y) + C(y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x^4 \cdot y^{-1} + \frac{\partial}{\partial y} C(y,z) \overset{!}{=} s^4 x^4 y^{-1} + stz e^{-2y}$$

für $(s,t) = (1,-2)$

$$x^4 \cdot y^{-1} + \frac{\partial}{\partial y} C(y,z) \overset{!}{=} x^4 \cdot y^{-1} - 2ze^{-2y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} C(y,z) = -2ze^{-2y}$$

$$C(y,z) = \int -2ze^{-2y}\,dy = -2ze^{-2y} \cdot \frac{1}{-2} = ze^{-2y} + \hat{C}(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^4 \cdot \ln(y) + ze^{-2y} + \hat{C}(z)\right)$$

$$= e^{-2y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{C}(z) \overset{!}{=} e^{-2y}$$

$$\hat{C}(z) = \int 0\,dz = c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

Inssgesamt ergibt sich als Potential

$$u\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x^4 \ln(y) + ze^{-2y} + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

Vielen Dank

für Ihre Aufmerksamkeit
und die vielen Fragen.
Nutzen Sie nach Anmeldung per
Mail weiterhin die Möglichkeit zu fragen.

Viel Erfolg

bei der Scheinklausur
bei der Modulprüfung
und in Ihrem weiteren Studium