Fortsetzung der Analysis

Die in diesem Semester zu behandelnden Themen setzen die Beherrschung der folgenden Inhalte voraus:

1. Häufungspunkte, Konvergenz von Folgen reeller Zahlen
2. Konvergenzkriterien für Folgen
3. Exponentialreihe
4. geometrische Reihe.

Wir raten Ihnen dringend, diese Inhalte aufzufrischen!

Im weiteren Verlauf werden wir auch Methoden aus der Linearen Algebra benötigen, wenn wir Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachten.

1.8.1. Definition.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir schreiben

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$$

für die Summe der ersten n Folgenglieder. Die damit definierte Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man eine (unendliche) Reihe, oft schreibt man

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \, ,$$

und meint damit zunächst die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Man nennt S_n die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Falls die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, nennt man die Reihe konvergent, und bezeichnet den Grenzwert als Summe der Reihe. Man schreibt dann

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \lim_{n\to\infty} S_n$$

(obwohl wir diese Bezeichnung eigentlich schon vergeben haben).

Wenn die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, nennt man die Reihe divergent.

1.8.4. Beispiel.

Die geometrische Reihe: *Für* $|q| < 1$ *gilt* $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$.

1.8.5. Beispiel.

Die harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ ist nicht konvergent,

die Partialsummen wachsen über jede vorgegebene Grenze hinaus.

Man benutzt die harmonische Reihe vor allem dazu, die Divergenz anderer Reihen nachzuweisen.

1.8.6. Beispiel.

Die Exponentialreihe ist gegeben als

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \qquad \text{(wir summieren ab } j = 0\text{)}.$$

1.8.7. Bemerkung.

In 1.2.8 haben wir die Monotonie und Beschränktheit (und damit die Konvergenz) der Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nachgewiesen.

Dem Grenzwert dieser Folge haben wir den Namen Eulersche Zahl e gegeben.

Man kann beweisen, dass auch $e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ gilt.