A. Logioti
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

Wintersemester 2022/23

I. Steinwart

Übungsblatt 2

Aufgabe 5. *Äquivalenzrelationen I*

(a) Die Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$x \, R \, y \; :\Leftrightarrow \; \exists k \in \mathbb{Z} \, : \, x - y = 4k.$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie alle Äquivalenzklassen und jeweils einen Repräsentanten für jede Äquivalenzklasse an.

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Relation auf $\mathbb{R}^2$ um eine Äquivalenzrelation handelt

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } (x_1, x_2) = (ry_1, ry_2).$$

Aufgabe 6. *Äquivalenzrelationen II*

(a) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Relation um eine Äquivalenzrelation auf A handelt

$$x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

(b) Sei I eine Indexmenge. Eine Partition $(A_i)_{i \in I}$ einer Menge A ist eine Zerlegung von A in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen A_i, d.h.

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad \text{wobei } A_k \cap A_l = \emptyset \text{ für } k, l \in I \text{ mit } k \neq l.$$

Sei A eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Partition von A. Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Relation um eine Äquivalenzrelation auf A handelt

$$x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow \exists i \in I : x_1, x_2 \in A_i.$$

Geben Sie alle Äquivalenzklassen für $\sim$ an.

Aufgabe 7. *Relationen*

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Prüfen Sie die folgenden Relationen $R_j \subseteq A^2$, $j = 1, 2, 3, 4$, jeweils auf Reflexivität, Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie.

(i) $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$,

(ii) $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$,

(iii) $R_3 = \{(1,3), (1,4), (2,4)\}$,

(iv) $R_4 = A^2$.

Aufgabe 8. *Injektiv, surjektiv, bijektiv*

Let $f : X \to Y$ and $g : Y \to Z$ be functions. Show that the following statements hold:

(a) If f and g are injective then $g \circ f$ is injective.

(b) If f and g are surjective then $g \circ f$ is surjective.

(c) If f and g are bijective then $g \circ f$ is bijective.

(d) If $g \circ f$ is surjective then g is surjective.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 1 (Bearbeitungszeit 31.10.–6.11.) auf folgender Webseite (der Link wechselt im Laufe des Semesters!):

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test387/`

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse ($<$st$******$@stud.uni-stuttgart.de$>$) erhalten haben.

Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Montag, den 31.10. um 14:00 Uhr und endet am Sonntag, den 6.11. um 24:00 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei nur die **letzten** Eingaben gewertet werden.

Sie können für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1 oder 2 Punkte erreichen.