A. Logioti
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

I. Steinwart

Wintersemester 2022/23

Übungsblatt 3

Aufgabe 9. *Komposition, Umkehrfunktion*

(a) Gegeben seien die Abbildungen $u, v, w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 - 1$, $v(x) = (x-1)^2$, $w(x) = 2x$. Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften von

(i) $u \circ v \circ w$

(ii) $v \circ u \circ w$

(iii) $w \circ v \circ u$

(iv) $w \circ u \circ v$

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (3x - 2y, 2 + y)$ bijektiv ist und bestimmen Sie f^{-1}.

Aufgabe 10. *Injektivität, Surjektivität*

Seien A und B nichtleere Mengen.

(a) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : A \to B$ genau dann injektiv ist, wenn es eine Abbildung $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gibt.

(b) Finden Sie eine analoge Bedingung, welche eine surjektive Abbildung $f\colon A \to B$ charakterisiert.

(c) Seien A und B nun zusätzlich endlich und die Anzahlen der Elemente von A und B gleich. Zeigen Sie, dass dann eine injektive Abbildung $f\colon A \to B$ bereits bijektiv ist.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass **(c)** für nicht endliche Mengen A und B falsch ist.

Aufgabe 11. *Vollständige Induktion I*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $7^n - 1$ durch 6 teilbar.
Dabei heißt eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ *teilbar* durch $k \in \mathbb{N}$, wenn es ein $j \in \mathbb{Z}$ gibt mit $m = k \cdot j$.

Aufgabe 12. *Vollständige Induktion II*

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = x\mathrm{e}^{3x}$ ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ gegeben durch

$$f^{(n)}(x) = (n3^{n-1} + 3^n x)\mathrm{e}^{3x}.$$

(b) Für alle $n \geqq 5$ gilt $n^2 \leqq 2^n$.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 3 (Bearbeitungszeit 7.11.–13.11.) auf folgender Webseite:

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test395/`