A. Logioti
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

Wintersemester 2022/23

I. Steinwart

Übungsblatt 4

Aufgabe 13. *Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz*

(a) Welche der folgenden Zahlen ist größer?

$$99^{50} + 100^{50} \quad \text{oder} \quad 101^{50}$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $a_{-n}, a_{-(n-1)}, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{N}$ mit

$$(1+x)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=-n}^{n} a_k x^k.$$

Bestimmen Sie a_{-1}.

(c) Für $n \geqq 4$ und $r \in \{0, \ldots, n-4\}$ sei

$$\alpha_j := \binom{n}{r+j}.$$

Beweisen Sie, dass gilt

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3} = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Aufgabe 14. *Kombinatorik*

Eine rechteckige Fläche ($3\,\mathrm{dm}$ breit und $4\,\mathrm{dm}$ hoch) soll mit quadratischen Fliesen der Fläche $1\,\mathrm{dm}^2$ bedeckt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn Ihnen

(a) 9 weiße und 3 schwarze Fliesen,

(b) 4 weiße, 2 schwarze, 3 blaue und 3 rote Fliesen

zur Verfügung stehen?

Dabei nehmen wir an, dass Fliesen von derselben Farbe nicht unterscheidbar sind, so dass zwei Kachelungen, die aus dem Vertauschen zweier Fliesen gleicher Farbe resultieren, als gleich angesehen werden.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 4 (Bearbeitungszeit 14.11.–20.11.) auf folgender Webseite (der Link wechselt im Laufe des Semesters!):

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test387/`

Der **Bearbeitungszeitraum** startet am Montag, den 14.11. um 14:00 Uhr und endet am Sonntag, den 20.11. um 24:00 Uhr. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei nur die **letzten** Eingaben gewertet werden.

Aufgabe 15. *Gruppen*

(a) Es sei $M = \{A, B, C\}$. Geben Sie alle möglichen Weisen an, auf die sich die untenstehende Verknüpfungstabelle ausfüllen lässt, wenn $(M, *)$ eine Gruppe mit Neutralelement A ist.

$*$	A	B	C
A			
B			
C			

(b) Es sei $M = \{A, B, C, D\}$. Geben Sie alle möglichen Weisen an, auf die sich die untenstehende Verknüpfungstabelle ausfüllen lässt, wenn $(M, *)$ eine Gruppe mit Neutralelement A ist.

$*$	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass jede Gruppe mit drei oder vier Elementen abelsch ist.

Aufgabe 16. *Körper*

Let $M := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : x = q_1 + \sqrt{2} q_2\}$ and '$+$' and '$\cdot$' be the usual addition and multiplication on the real numbers (in particular, these operations inherit the associative, commutative and distributive properties). Show that $(M, +, \cdot)$ is a field.

Hinweis: Das englische Wort für *Körper* im Sinne der Algebra ist *field* (und **nicht** etwa *body*).