

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. *Pythagoras*

- a) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}).$$

Hinweis: Stellen Sie z und w in kartesischen Koordinaten dar.

- b) Seien $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und φ_1, φ_2 die Winkel zwischen der reellen Achse und der Verbindungsstrecke von 0 und z bzw. von 0 und w mit

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

Aufgabe 22. *Polynome*

- a) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.
 - Jedes Polynom n -ten Grades hat n verschiedene Nullstellen in \mathbb{C} .
- b) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Polynome

$$p(z) = 6z^3 + 7z^2 - 61z + 28, \quad q(z) = z^3 - z^2 + 2,$$

in kartesischen Koordinaten, d.h. in der Form $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Die Polynome p und q besitzen mindestens eine ganzzahlige Nullstelle.

Aufgabe 23. *Gleichungen*

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\text{i) } z - 4 = (3 - 2z)i, \quad \text{ii) } z^2 + (2 + 2i)z + 1 + 2i = 0, \quad \text{iii) } \bar{z}^4 - (1 - i)\bar{z}^2 - i = 0.$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischen Koordinaten an.

- b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^2 = -16 + 30i$

Aufgabe 24. *Faktorisierung*

(a) Let $p(z) = z^4 + 64$.

(i) If $z = 2 + 2i$ is a root of p , find the remaining complex roots of p .

(ii) Factorize p completely over the complex and over the real numbers.

(b) Write the polynomial q as a product of linear factors, where

$$q(z) = 3z^3 - (6 + i)z^2 + (5 - i)z - 2 + 2i.$$

Hint: $z = 1$ is a root of q .

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 6 (Bearbeitungszeit 28.11.–4.12.) auf folgender Webseite (der Link wechselt im Laufe des Semesters!):

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test387/>

