

## Übungsblatt 6

### Aufgabe 21. *Pythagoras*

- a) Zeigen Sie, dass für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}).$$

Hinweis: Stellen Sie  $z$  und  $w$  in kartesischen Koordinaten dar.

- b) Seien  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $\varphi_1, \varphi_2$  die Winkel zwischen der reellen Achse und der Verbindungsstrecke von 0 und  $z$  bzw. von 0 und  $w$  mit

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

### Aufgabe 22. *Polynome*

- a) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.  
i) Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.  
ii) Jedes Polynom  $n$ -ten Grades hat  $n$  verschiedene Nullstellen in  $\mathbb{C}$ .
- b) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Polynome

$$p(z) = 6z^3 + 7z^2 - 61z + 28, \quad q(z) = z^3 - z^2 + 2,$$

in kartesischen Koordinaten, d.h. in der Form  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Hinweis: Die Polynome  $p$  und  $q$  besitzen mindestens eine ganzzahlige Nullstelle.

### Aufgabe 23. *Gleichungen*

- a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\text{i) } z - 4 = (3 - 2z)i, \quad \text{ii) } z^2 + (2 + 2i)z + 1 + 2i = 0, \quad \text{iii) } \bar{z}^4 - (1 - i)\bar{z}^2 - i = 0.$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischen Koordinaten an.

- b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von  $z^2 = -16 + 30i$

**Aufgabe 24.** *Faktorisierung*

(a) Let  $p(z) = z^4 + 64$ .

(i) If  $z = 2 + 2i$  is a root of  $p$ , find the remaining complex roots of  $p$ .

(ii) Factorize  $p$  completely over the complex and over the real numbers.

(b) Write the polynomial  $q$  as a product of linear factors, where

$$q(z) = 3z^3 - (6 + i)z^2 + (5 - i)z - 2 + 2i.$$

**Hint:**  $z = 1$  is a root of  $q$ .

**Online-Aufgabe**

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 6 (Bearbeitungszeit 28.11.–4.12.) auf folgender Webseite (der Link wechselt im Laufe des Semesters!):

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test387/>

