

Übungsblatt 8

Aufgabe 29. Ebenen

Gegeben seien die Ebenen

$$E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Schnittgerade $g = E_1 \cap E_2$.
- (b) Bestimmen Sie alle Ebenen, die zum Ursprung den Abstand 3 haben und die Ebenen E_1 und E_2 senkrecht schneiden.

Aufgabe 30. Metrik

Let M be any nonempty set and d be defined as follows:

$$d : M \times M \rightarrow [0, \infty),$$
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

- (a) Show that d defines a metric on M .
Remark: One calls d the *discrete metric*.
- (b) Is the sequence $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (\mathbb{R}, d) convergent to 0?
- (c) Give an example for a zero sequence in (\mathbb{R}, d) and prove convergence explicitly.
- (d) Given the discrete metric, how can we characterize convergent sequences in arbitrary sets M ?

Aufgabe 31. Konvergenz

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = -\frac{n-1}{n+1}$

(c) $a_n = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2 + 1}$

(b) $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$

(d) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\pi n)$

Aufgabe 32. Grenzwerte

Bestimmen sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 + 3n^{4/3}} - n^{2/3})$

Hinweis: Erweitern Sie die obigen Ausdrücke geschickt, indem Sie die dritte binomische Formel verwenden:

$$(a^n - b^n) = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 8 (Bearbeitungszeit 12.12.–18.12.) auf folgender Webseite (der Link wechselt im Laufe des Semesters!):

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test387/>