A. Logioti
F. Schewe
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

Wintersemester 2022/23

I. Steinwart

Übungsblatt 10

Aufgabe 37. *Stetigkeit I, Reihen I*

(a) Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Weiterhin sei d_1 die diskrete Metrik (siehe Aufgabe 30, Blatt 8). Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie jeweils die Werte der folgenden Reihen:

i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} 4\frac{(-3)^k}{k!}$ ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-k}{k!}$

Aufgabe 38. *Reihen II*

Prüfen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{(n^2)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Aufgabe 39. *Verkettung, Hölder-Stetigkeit*

Let $f : U \to V$, $g : V \to W$. Show the following for the composition $(g \circ f) : U \to W$.

(a) If f and g are uniformly continuous, then $(g \circ f)$ is uniformly continuous.

(b) If f is α-Hölder continuous and g is β-Hölder continuous, then $(g \circ f)$ is $(\alpha \cdot \beta)$-Hölder continuous.
Remark: In particular, this implies that the composition of Lipschitz continuous functions is again Lipschitz continuous.

Aufgabe 40. *Stetigkeit II*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen jeweils auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$,

(b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[4]{|x|}$,

(c) $f : \mathbb{N} \to \{-1, 1\},\ f(n) = (-1)^n$,

(d) $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \begin{cases} \cos(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 10 (Bearbeitungszeit 9.1.–15.1.) auf folgender Webseite (der Link wechselt im Laufe des Semesters!):

`https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test387/`