

Übungsblatt 11

Aufgabe 41. Stetigkeit Sätze

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über stetige Funktionen.

- (a) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$, so dass $f([a, b]) = [c, d]$.
- (b) Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und gilt $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$, dann gilt sogar $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Sie können die folgende Tatsache verwenden: Für jede reelle Zahl a gibt es eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$ gilt.

Aufgabe 42. Stetigkeit, Zwischenwertsatz I

- (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \geq 1, \\ a(x^3 - 5), & x < 1, \end{cases}$$

stetig?

- (b) Beweisen Sie, dass die Gleichung $2 - e^x = 4x$ eine Lösung hat im dem Intervall $[0, 1]$.

Aufgabe 43. Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

- (a) Let f be uniformly continuous on all of \mathbb{R} , and define a sequence of functions by $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. Show that $f_n \rightarrow f$ uniformly. Give an example to show that this proposition fails if f is only assumed to be continuous and not uniformly continuous on \mathbb{R} .

Hint: Consider a 'simple' function as counterexample.

- (b) For each $n \in \mathbb{N}$ define $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ by $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}$. Show that f_n converges pointwise on \mathbb{R} , but not uniformly on \mathbb{R} . [Hint: for the latter, consider the continuity of the limit function.]

Aufgabe 44. Zwischenwertsatz II

Ein Bergsteiger verlässt sein Haus um 7 Uhr morgens und wandert zum Gipfel des Berges, wo er um 19 Uhr ankommt. Am nächsten Tag startet er um 7 Uhr morgens vom Gipfel des Berges, nimmt denselben Weg zurück und kommt um 19 Uhr zu Hause an. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass es einen Punkt auf dem Weg gibt, den er an beiden Tagen genau zur gleichen Tageszeit passiert.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 11 (Bearbeitungszeit 16.1.–22.1.) auf folgender Webseite:

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test395/>

