

Übungsblatt 12

Aufgabe 45. Differenzierbarkeit: Definition

Es sei jeweils $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Verwenden Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben nur die Definition der Ableitung mit Hilfe des Grenzwerts des Differenzenquotienten.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - 4) & 0 < x < 2 \\ 0 & x = 2 \\ \frac{2}{x^2}(x^2 - 4) & x > 2 \end{cases}$$

bei $x = 2$ differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$ für $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

bei $x = 0$ differenzierbar ist.

Aufgabe 46. Differenzierbarkeit

Bestimmen Sie jeweils wo möglich die Ableitung der folgenden auf \mathbb{R} definierten Funktionen und geben Sie gegebenenfalls an, wo die Ableitung nicht existiert. Sie dürfen dabei die Differenzierbarkeit von Polynomen, sowie Wurzelfunktionen als gegeben voraussetzen und die Formeln für die Ableitung dieser Funktionen ohne Beweis verwenden.

$$\text{a) } f_1(x) = |x|, \quad \text{b) } f_2(x) = x|x|, \quad \text{c) } f_3(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Aufgabe 47. Ableitungen

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen auf dem jeweiligen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Geben Sie Ihren Rechenweg an.

(a) $\arctan(e^{2x})$

(c) $\frac{\sinh(x)}{1+x^2}$

(b) $x \ln(x) - x$

(d) $\sqrt[4]{3^x}$

Aufgabe 48. *Lineare Approximation*

Finden Sie einen Näherungswert für $\sqrt{15}$, indem Sie die lineare Approximation von $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

(a) an der Stelle $x = 16$

(b) an der Stelle $x = 9$

verwenden. Welches ist der bessere Näherungswert und warum?

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 12 (Bearbeitungszeit 23.1.–29.1.) auf folgender Webseite (der Link wechselt im Laufe des Semesters!):

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test387/>

