

Übungsblatt 13

Aufgabe 49. Ableitungen

(a) Berechnen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

i) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{1+x^2} + 3 \cosh^2(x) + \ln(1+x^2)}$

ii) $f_2 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \frac{(2-x)e^x}{2+x} + \frac{(2-\cos(x))e^{\cos(x)}}{2+\cos(x)}$

iii) $f_3 : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = \ln(\ln(x) + \ln(2\sqrt[8]{x}))$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen den Wert für $(f^{-1})'(f(1))$ für die Funktion $f(x) = x + x^3$.

Aufgabe 50. Regeln von de l'Hôpital

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von de l'Hôpital:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 8x}{x^2 - x - 2}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x - \sin x$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x$. Darf man, wenn man den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x)$ berechnen will, die Regel von de l'Hôpital anwenden und folgern, dass:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1} = \text{divergent?}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 51. Satz von Rolle, Mittelwertsatz

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x) + 2 - x,$$

höchstens zwei Nullstellen besitzt.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass aus dem Satz von Rolle folgt: Hat eine differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I n Nullstellen, so besitzt die Ableitung f' mindestens $n - 1$ Nullstellen in I .

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^4 + 3x + 1$ genau eine Nullstelle im Intervall $[-2, -1]$ hat.

Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz, um zu zeigen, dass f mindestens eine Nullstelle in $[-2, -1]$ hat.

Online-Aufgabe

Sie finden die Online-Aufgabe zum Blatt 13 (Bearbeitungszeit 30.1.–5.1.) auf folgender Webseite:

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test395/>



Aufgabe 52. *Kurvendiskussion*

Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, with $f(x) = xe^{-x}$. Determine the zeros, local extrema and inflection points of f . Analyse the behaviour of $f(x)$ for $x \rightarrow \pm\infty$. Determine the image $f(\mathbb{R})$. Sketch the graph of f .