HÖHERE MATHEMATIK I

Ingo Steinwart

2022-2023

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Stochastik und Anwendungen

CHAPTER 1: GRUNDLAGEN

Section 1.1
Logik

AUSSAGEN

Die Logik befasst sich mit Aussagen, d.h. mit (im weitesten Sinne sprachlichen) Sätzen, die objektiv entweder wahr oder falsch sind. Insbesondere gelten daher folgende Prinzipien:

- **Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten ("Tertium non datur"):** Eine Aussage muss wahr oder falsch sein.
- **Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch:** Eine Aussage darf nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.

Im folgenden kürzen wir "wahr" häufig mit "w" und "falsch" mit "f" ab.

BEISPIELE

Der folgende Satz ist eine Aussage, die wahr ist:

Das Wintersemester 2022/23 an der Universität Stuttgart beginnt im Oktober.

Der folgende Satz ist eine Aussage, die falsch ist:

$2 + 2 = 5$

Der folgende Satz ist keine Aussage, da sein Wahrheitsgehalt subjektiv ist:

Grün ist schöner als Rot.

Der folgende Satz ist keine Aussage, da kein Wahrheitsgehalt zugewiesen werden kann:

Dieser Satz ist falsch.

BOOL'SCHE OPERATOREN

Aussagen können miteinander kombiniert werden. Sind beispielsweise p und q zwei Aussagen, so ist die

Negation (Verneinung) von p, schreibe $\neg p$ und sage "nicht p", durch die folgende Wahrheitstabelle gegeben:

p	$\neg p$
w	f
f	w

Konjunktion ("und") von p und q, schreibe $p \wedge q$ und sage "p und q", durch die folgende Wahrheitstabelle gegeben:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Mit anderen Worten: $p \wedge q$ ist genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind.

BOOL'SCHE OPERATOREN

Disjunktion ("oder") von p und q, schreibe $p \vee q$ und sage "p oder q", durch die folgende Wahrheitstabelle gegeben:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachte: "oder" ist nicht exklusiv gemeint, d.h. wenn sowohl p als auch q wahr sind, so ist auch "p oder q" wahr.

Implikation von p und q, schreibe $p \Rightarrow q$ und sage "Aus p folgt q.", durch die folgende Wahrheitstabelle gegeben:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Mit anderen Worten: ist $p \Rightarrow q$ wahr, so können wir:

- aus der Wahrheit von p auf die Wahrheit von q schliessen.
- aus der Wahrheit von q **nicht** auf die Wahrheit von p schliessen.
- aus der Falschheit von q auf die Falschheit von p schliessen.

Wir sagen, dass p **hinreichend für** q **ist** und dass q **notwendig für** p **ist**.

Äquivalenz von p und q, schreibe $p \Leftrightarrow q$ und sage “p ist zu q äquivalent.”, durch die folgende Wahrheitstabelle gegeben:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Mit anderen Worten, $p \Leftrightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn p und q die gleichen Wahrheitswerte haben.

TAUTOLOGIEN

Eine Verknüpfung von Aussagen, die unabhängig von den Wahrheitswerten der einzelnen Aussagen immer wahr ist, heißt Tautologie.

Sind p und q Aussagen, so ist zum Beispiel

$$(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

eine Tautologie, wie die folgende Wahrheitstabelle zeigt:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	w	w

Tautologien können also "logischen Rechenregeln" entsprechen. In solchen Fällen schreiben wir daher häufig auch "$\equiv$" statt "$\Leftrightarrow$". Die obige Tautologie kann deshalb auch als

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

geschrieben werden.

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Tautologien, die aus einer Aussage gebildet werden können, zusammen.

Theorem 1.1.1

Ist p eine Aussage, so sind die folgenden Aussagen Tautologien:

*i). **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**: $p \vee \neg p$.*

*ii). **Satz vom Widerspruch**: $\neg(p \wedge \neg p)$.*

*iii). **Satz von der doppelten Verneinung**: $\neg(\neg p) = p$.*

*iv). **Idempotenz**:*

$$p \wedge p \equiv p\,,$$
$$p \vee p \equiv p\,.$$

EINIGE WICHTIGE TAUTOLOGIEN

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Tautologien, die aus mehreren Aussagen gebildet werden, zusammen.

Theorem 1.1.2
Sind p, q und r Aussagen, so sind die folgenden Aussagen Tautologien:

i). *Rechenregeln von de Morgan*:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q\,,$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q\,.$$

ii). *Kontraposition*: $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

iii). *Zerlegung der Äquivalenz*: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

iv). *Transitivität*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

v). *Distributivgesetze*:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)\,,$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)\,.$$

BEMERKUNGEN

Neben den oben genannten Tautologien gibt es noch weitere Tautologien, wie z.B. die Kummutativitäten $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ und $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$.

Es gibt genau 16 zweistellige logische Operationen, d.h. Verknüpfungen, die aus 2 Aussagen p und q eine neue Aussage $f(p, q)$ generieren. Jede dieser 16 Operationen und die Verneinung lässt sich durch die Operation $\neg(p \wedge q)$, die wir mit $p \,\mathrm{NAND}\, q$ bezeichnen, darstellen. So gilt zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\neg p &\equiv (p \,\mathrm{NAND}\, p)\,, \\
p \wedge q &\equiv (p \,\mathrm{NAND}\, q) \,\mathrm{NAND}\, (q \,\mathrm{NAND}\, p)\,.
\end{aligned}
$$

Analog lässt sich jede dieser 17 Operationen auch durch die Operation $\neg(p \vee q)$, die wir mit $p \,\mathrm{NOR}\, q$ bezeichnen, darstellen.

Schreiben wir “1” statt “w” und “0” statt “f”, so entspricht $p \wedge q$ der Multiplikation. Analog entspricht das “exklusive oder”,
d.h. $p \,\mathrm{XOR}\, q :\equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$, der Addition mit Überlauf.

Wenn Aussagen Variablen enthalten, sprechen wir von **Aussageformen**. Einfache Beispiele von Aussageformen sind

$$p_1(x) := \text{“}x \text{ ist 20 Jahre alt.”}\,,$$
$$p_2(x) := \text{“}x < 2\text{”}\,.$$

Durch Einsetzen “erlaubter” Werte für die Variable erhalten wir Aussagen:

$$p_1(\text{“Ingo Steinwart”}) = f\,,$$
$$p_2(1) = w\,,$$
$$p_2(2) = f\,.$$

$p_1(1)$ macht hingegen keinen Sinn, da die Zahl 1 kein Alter hat.

Aus einer Aussageform $p(x)$ können mithilfe von **Quantoren** ebenfalls Aussagen gebildet werden. Die folgende Quantoren interessieren uns:

- **All-Quantor:**

  $$\forall x : p(x)$$

  steht für die Aussage, dass für alle erlaubten Werte von x die Aussage $p(x)$ wahr ist.
- **Existenz-Quantor:**

  $$\exists x : p(x)$$

  steht für die Aussage, dass es mindestens einen erlaubten Wert von x gibt, so dass die Aussage $p(x)$ wahr ist.
- **Einzigkeits-Quantor:**

  $$\exists! x : p(x)$$

  steht für die Aussage, dass es genau einen erlaubten Wert von x gibt, so dass die Aussage $p(x)$ wahr ist.

Mit den obigen p_1 und p_2 ist beispielsweise die Aussage $\forall x : p_1(x)$ falsch, während die Aussage $\exists x : p_2(x)$ wahr ist.

Mit Quantoren gebildete Aussagen können wieder verglichen werden. So gelten zum Beispiel die **de-Morgan'schen-Regeln**

$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x : \neg p(x)\,,$$
$$\neg(\forall x : p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)\,.$$

Aussageformen können von mehreren Variablen abhängen. In diesem Fall kann die Reihenfolge von Quantoren eine wesentliche Rolle spielen. Beispielsweise sind die Aussagen

$$\forall x\, \exists y : p(x, y) \qquad \text{und} \qquad \exists y\, \forall x : p(x, y)$$

im Allgemeinen nicht äquivalent, da im ersten Fall der Wert von y von x abhängen kann, während er im zweiten Fall von x unabhängig sein muss.

BEMERKUNGEN ZUM BEWEIS VON AUSSAGEN

Wollen wir zeigen, dass die Aussage $\forall x : p(x)$ wahr ist, können wir z.B. die Aussage $p(x)$ für jeden einzelnen Wert von x überprüfen. Dies funktioniert aber eigentlich nur, falls es nur endlich viele (oder genauer: wenige) erlaubte Werte von x gibt.

Steht x beispielsweise für alle Mannschaften der 1. Fußball-Bundesliga, so lässt sich durch Überprüfen aller 18 Teams zeigen, dass die Aussage

$$\forall x : \text{“}x \text{ hat mindestens einen Torwart”}$$

wahr ist. Steht x jedoch für alle Zahlen, so ist die Aussage

$$\forall x : x + 1 > x$$

nicht mehr durch Betrachtung jeder einzelnen Zahl als wahr zu identifizieren. Stattdessen ist ein mathematischer Beweis notwendig, der beispielsweise schon bekannte, wahre Aussagen ausnutzt. Wissen wir z.B. dass die beiden Aussagen $1 > 0$ und $\forall x, y, z : x > y \Rightarrow z + x > z + y$ wahr sind, so folgt die obige Aussage durch Betrachtung von $x = 1$ und $y = 0$. In den meisten Fällen ist ein Beweis aber deutlich länger und damit komplizierter.

Wollen wir zeigen, dass die Aussage $\exists x : p(x)$ wahr ist, müssen wir ein x finden. Wie für den All-Quantor kann dies z.B. dadurch geschehen, dass man hintereinander die Aussage $p(x)$ für jeden einzelnen Wert von x überprüft und stoppt, sowie man einen Wert gefunden hat, für den $p(x)$ wahr ist.

Steht x wieder für alle Mannschaften der 1. Fußball-Bundesliga, so ist schon für $x =$ "Werder Bremen" die Aussage

$$\exists x : \text{“}x \text{ hat mindestens einen Torwart”}$$

wahr und das Überprüfen der restlichen 17 Teams erübrigt sich.

Im Falle von unendlich vielen Werten kann manchmal ebenfalls ein geeigneter Wert von x "erraten" werden, meistens ist aber ebenfalls ein Beweis notwendig.

Schließlich lassen sich mithilfe der de-Morgan'schen-Regeln Aussagen mit All-Quantoren in solche mit Existenz-Quantoren (und umgekehrt) umwandeln. Ein etwas längeres, aber nicht untypisches Beispiel hierzu ist

$$\neg\big(\forall x\, \exists y\, \forall z : p(x,y,z)\big) \quad \equiv \quad \exists x\, \forall y\, \exists z : \neg p(x,y,z)\,.$$

Section 1.2
Mengen

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten. Diese werden **Elemente** genannt. Jedes Element kann nur einmal in der Menge vorkommen. Es gibt keine Reihenfolge für die Elemente einer Menge.

Mengen werden in der Regel mit großen Buchstaben bezeichnet, Elemente häufig mit kleinen. Ist M eine Menge und x ein Objekt, so schreiben wir:

$$x \in M \qquad \text{falls } x \text{ ein Element von } M \text{ ist.}$$
$$x \notin M \qquad \text{falls } x \text{ kein Element von } M \text{ ist.}$$

Ferner bezeichnet $\emptyset$ die **leere Menge**, d.h. die Menge die kein Element enthält.

Mengen mit wenigen, explizit bekannten Elementen können durch Auflistung der Elemente beschrieben werden, z.B.

$$M := \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ist $p(x)$ eine Aussageform mit Variable x so ist

$$M := \{x : p(x)\} := \{x \,|\, p(x)\}$$

die Menge aller erlaubten Werte von x, für die Aussage wahr ist[1]. Damit lassen sich auch unendliche Mengen einfach beschreiben, z.B

$$M := \left\{n : n \text{ ganze Zahl und } n \geq 10\right\}.$$

[1]Hier muss man allerdings etwas aufpassen, wie in Abschnitt 28 noch gezeigt wird.

INKLUSION UND IDENTITÄT

Seien A und B zwei Mengen, so ist A eine **Teilmenge** von B, genau dann wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, d.h.

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) .$$

In diesem Fall schreiben wir $A \subset B$.

Ferner sind die **Mengen gleich**, geschrieben $A = B$, genau dann wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt, d.h., genau dann wenn

$$\forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B) .$$

Beispielsweise gilt $\{21, 22, 23\} \subset \{n : n \text{ ganze Zahl und } n \geq 10\}$ und

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3, 4, 4\} .$$

Ferner gilt sowohl $\emptyset \subset A$ als auch $A \subset A$ für jede Menge A. Sind schließlich A, B und C Mengen mit $A \subset B$ und $B \subset C$, so gilt auch $A \subset C$.

OPERATIONEN MIT MENGEN

Sind A und B zwei Mengen, so können wir die folgenden Mengen definieren:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Durchschnitt:} \quad & A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}\,, \\
\textbf{Vereinigung:} \quad & A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}\,, \\
\textbf{Differenz:} \quad & A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}\,.
\end{aligned}
$$

Ferner sagen wir, dass A und B **disjunkt** sind, falls $A \cap B = \emptyset$. Gibt es zudem eine feste, aus dem Zusammenhang bekannte Menge M mit $A \subset M$, so schreiben wir auch

$$A^{\mathrm{c}} := M \setminus A\,.$$

Es gilt beispielsweise

$$
\begin{aligned}
\{1,2\} \cap \{2,3,4\} &= \{2\}\,, \\
\{1,2\} \cup \{2,3,4\} &= \{1,2,3,4\}\,, \\
\{1,2\} \setminus \{2,3,4\} &= \{1\}\,, \\
\{2,3,4\} \setminus \{1,2\} &= \{3,4\}
\end{aligned}
$$

und die Mengen $\{1,2\}$ und $\{3,4\}$ sind disjunkt.

Lemma 1.2.1

Sind A und B Mengen, so gelten die folgenden Identitäten:

$$A \cap B = B \cap A\,,$$
$$A \cup B = B \cup A\,,$$
$$A \cap A = A\,,$$
$$A \cup A = A\,,$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset\,,$$
$$A \cup \emptyset = A\,.$$

Ist C eine weitere Menge, so gilt zudem

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\,,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,,$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

Lemma 1.2.2

Sind A, B und C Mengen, so gelten die folgenden Identitäten:

$$
\begin{aligned}
A \setminus A &= \emptyset\,, \\
A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)\,, \\
A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C)\,, \\
(A \setminus B) \setminus C &= A \setminus (B \cup C)\,, \\
A \setminus (B \setminus C) &= (A \setminus B) \cup (A \cap C)\,,
\end{aligned}
$$

und damit insbesondere auch $(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$ *und* $(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}$.

KARTESISCHES PRODUKT

Sind x und y zwei Objekte, bezeichnet (x, y) das **geordnete Paar** von x und y. Insbesondere ist (x, x) ein Paar und es gilt $(x, y) = (y, x)$ genau dann wenn $x = y$.

Sind A und B zwei Mengen, so ist das **kartesisches Produkt** von A und B

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\} .$$

So ist beispielsweise $(1, 2) \neq (2, 1)$ und

$$\{1, 2\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\} .$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass geordnete Paare auch formal durch

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

einführt werden können. Uns wird aber ein informelles Verständnis ausreichen.

OPERATIONEN MIT MEHR ALS ZWEI MENGEN

Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge und haben wir für jedes $i \in I$ eine Menge A_i, so definieren wir

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \left\{x \,\middle|\, \forall i \in I : x \in A_i\right\},$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i := \left\{x \,\middle|\, \exists i \in I : x \in A_i\right\}.$$

Sei ferner $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $x_i \in A_i$ für alle $i \in I$, so bezeichnen wir die geordnete Folge mit Wiederholungen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ als **n-Tupel**. Für $n = 3$ sprechen wir auch von **Tripeln**. Insbesondere ist ein 2-Tupel ein geordnetes Paar und Gleichheit von zwei n-Tupeln ist durch

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad :\Leftrightarrow \qquad \forall i \in I : x_i = y_i$$

definiert. Damit definieren wir das kartesisches Produkt von A_1, A_2, ..., A_n durch

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \forall i \in I : x_i \in A_i\right\}.$$

Für $A := A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ schreiben wir auch $A^n = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Ist A eine Menge, so ist die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ von A die Menge aller Teilmengen von A, d.h.

$$\mathcal{P}(A) := \{B : B \subset A\} .$$

Hat A genau n Elemente, so hat $\mathcal{P}(A)$ genau 2^n Elemente.

Für $A := \{1, 2, 3\}$ gilt beispielsweise

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\} .$$

AUSSAGEFORMEN, DIE NICHT ZU MENGEN FÜHREN

Bei der Bildung von Mengen mit Aussageformen muss man (etwas) vorsichtig sein. Für die Aussageform

$$p(x) := (x \notin x)$$

führt z.B. die zugehörige Bildung der Menge

$$M := \{x : p(x)\} = \{x : x \notin x\}$$

bei der Frage nach $M \in M$ zu einem Widerspruch, denn es gilt

$$\begin{aligned} M \in M \qquad &\Rightarrow \qquad M \notin M\,, \\ M \notin M \qquad &\Rightarrow \qquad M \in M\,. \end{aligned}$$

Damit kann $M \in M$ weder richtig noch falsch sein, d.h. die Aussage $M \in M$ hat keinen Wahrheitswert! Das Problem liegt in der “Selbstreferenzierung”, die vermieden werden kann, wenn Mengen nur innerhalb einer bekannten Obermenge, wie den ganzen Zahlen, den reellen Zahlen, etc. gebildet werden. Dies führt zu einer Beschränkung der erlaubten Werte von Variablen in Aussageformen.

EINIGE WICHTIGE MENGEN

Aus der Schule sollten schon einige wichtige Mengen bekannt sein, wie z.B.

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2 \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0
$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} := \{m/n : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall zwischen a und b
$(a, b) :=]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall zwischen a und b
$[a, b) := [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall zwischen a und b
$\dots$	

Diese werden aber noch ausführlicher betrachtet werden.

Section 1.3
Relationen und Abbildungen

Definition 1.3.1

Seien A und B Mengen. Dann ist eine **Relation** R zwischen A und B eine Teilmenge $R \subset A \times B$.

Ist R eine Relation zwischen A und B so wird $(x, y) \in R$ so interpretiert, dass x und y in Relation zueinander stehen. Dies wird auch häufig durch

$$xRy :\Leftrightarrow (x, y) \in R$$

beschrieben. Für spezielle Relationen wird R dabei durch ein anderes, eingängigeres Symbol ersetzt.

Ist beispielsweise $A = B$, so ist $R := \{(x, y) \in A \times B : x = y\}$ eine Relation und wir schreiben $x = y$ statt xRy. Für $A = B = [0, 1]$ ist auch $R := \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ eine Relation und wir schreiben $x \leq y$ statt xRy. Illustrationen dieser beiden Relationen finden sich in Abbildung 1.

Diese Beispiele verdeutlichen schon, dass unsere Definition einer Relation nur beschreibt, was sie “formal” ausmacht, nicht aber was sie “inhaltlich” bedeutet. Im allgemeinen ist nur ein sehr kleiner Anteil aller Relationen zwischen zwei Mengen A und B wirklich “interessant”.

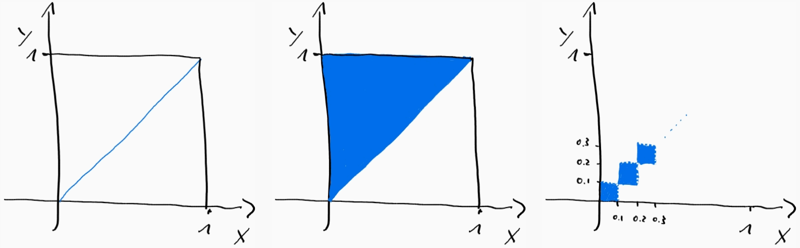


Abbildung: Illustrationen für drei Relationen (jeweils in blau) auf $[0,1]^2$. **Links:** Die Relation "$=$". **Mitte:** Die Relation "$\leq$". **Rechts:** Die Relation R aus (1.3.1).

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor t \rfloor$ die Abrundung von t auf die nächste kleinere ganze Zahl, d.h.

$$\lfloor t \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq t\}\,.$$

Für $A = B = [0,1]$ ist dann $R := \{(x,y) \in A \times B : \lfloor 10x \rfloor = \lfloor 10y \rfloor\}$ eine Relation und für $x, y \in [0,1]$ gilt

$$xRy \Leftrightarrow \text{1. Nachkommastelle ist gleich} \tag{1.3.1}$$

Das letzte Beispiel gehört zu einer besondere Klasse von Relationen, die wir in der folgenden Definition einführen.

Definition 1.3.2

Sein $A \neq \emptyset$ eine Menge und $R \subset A \times A$ eine Relation. Dann heißt R **Äquivalenzrelation** auf A, genau dann wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

i). **Reflexivität:** Für alle $x \in A$ gilt $(x, x) \in R$.

ii). **Symmetrie:** Für alle $x, y \in A$ gilt $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

iii). **Transitivität:** Für alle $x, y, z \in A$ gilt

$$\big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\big) \Rightarrow (x, z) \in R\,.$$

Im folgenden werden Äquivalenzrelationen auch mit $\sim$ oder $\equiv$ bezeichnet. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und $x \in A$, dann heißt

$$[x]_\sim := \{y \in A : x \sim y\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x und x ein **Repräsentant** dieser Äquivalenzklasse.

Die Relation "$=$" ist neben der in (1.3.1) definierten Relation eine Äquivalenzrelation. Bei der letzteren sieht man auch deutlich, dass z.B. die Elemente in $[0]_\sim = [0, 1/10)$ zueinander äquivalent sind, während keines der Elemente in $[0]_\sim = [0, 1/10)$ äquivalent zu einem Element in $[1/10]_\sim = [1/10, 2/10)$ ist.

Das folgende Resultat zeigt, dass diese Beobachtung nicht zufällig ist.

Lemma 1.3.3

Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann gilt für alle $x, y \in A$ entweder

$$[x]_\sim = [y]_\sim$$

oder

$$[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset\,.$$

Insbesondere ist jedes $x \in A$ in genau einer Äquivalenzklasse, nämlich $[x]_\sim$, enthalten.

BEWEIS

Anhand einer Wahrheitstabelle überprüft man leicht, dass wir für alle $x, y \in A$

$$[x]_\sim = [y]_\sim \qquad \iff \qquad [x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$$

zeigen müssen.

Sei dazu zunächst $[x]_\sim = [y]_\sim$. Dann gilt $y \in [y]_\sim = [x]_\sim$ und damit $y \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$, d.h. $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$.

Gilt umgekehrt $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$ dann gibt es ein $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$. Wegen $x \sim z$ und $z \sim y$ folgern wir $x \sim y$.

Sei nun $w \in [x]_\sim$. Dann gilt $w \sim x$ und wegen $x \sim y$ damit auch $w \sim y$, d.h. $w \in [y]_\sim$. Mit anderen Worten haben wir $[x]_\sim \subset [y]_\sim$ gezeigt. Der Beweis von $[y]_\sim \subset [x]_\sim$ ist analog, und damit sehen wir insgesamt $[x]_\sim = [y]_\sim$.

Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A teilt A in die Äquivalenzklassen von $\sim$ auf. Die Elemente einer Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ werden dabei als “gleichwertig” im Sinne von $\sim$ aufgefasst und jedes Element $y \in [x]_\sim$ kann als Repräsentant dieser Äquivalenzklasse genommen werden. In diesem Sinne dient eine Äquivalenzklasse zur Fokussierung auf das für einen bestimmten Zweck Wesentliche.

Für die Äquivalenzrelation $\sim := A \times A$ gilt $[x]_\sim = A$ für jedes $x \in A$ und damit ist $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$ nie erfüllt.

Weitere wichtige Relationen werden in der folgenden Definition eingeführt.

Definition 1.3.4

Sein $A \neq \emptyset$ eine Menge und $R \subset A \times A$ eine Relation. Dann heißt R **Halbordnung** auf A, genau dann wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

i). **Reflexivität:** Für alle $x \in A$ gilt $(x, x) \in R$.

ii). **Anti-Symmetrie:** Für alle $x, y \in A$ gilt

$$\big((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R\big) \Rightarrow x = y\,.$$

iii). **Transitivität:** Für alle $x, y, z \in A$ gilt

$$\big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\big) \Rightarrow (x, z) \in R\,.$$

Gilt zusätzlich noch die **Vergleichbarkeit**, d.h.

$$\forall x, y \in A : \big((x, y) \in R \vee (y, x) \in R\big)$$

so ist R eine **Totalordnung**.

Halbordnungen werden statt mit R in der Regel mit einem zu $\leq$ “ähnlichen” Symbol bezeichnet. Insbesondere ergibt $\leq$ auf jeder Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Totalordnung. Ferner liefert $\subset$ auf $\mathcal{P}(A)$ eine Halbordnung, die im allgemeinen keine Totalordnung ist.

Bis jetzt haben wir nur Relationen auf A^2 kennengelernt. Die folgende Art von Relationen kann auf beliebigen Produkten $A \times B$ betrachtet werden und gehört zu den zentralsten Begriffen der Mathematik.

Definition 1.3.5

Seien A und B nicht leere Mengen und $f \subset A \times B$ eine Relation zwischen A und B. Dann heißt f **Abbildung** oder **Funktion**, genau dann wenn für alle $x \in A$ genau ein $y_x \in B$ gibt, das zu x in Relation steht. In diesem Fall schreiben wir $f : A \to B$ und $f(x) := y_x$, oder auch

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x)\,. \end{aligned}$$

Die Menge A heißt **Definitionsbereich** der Funktion f und B heißt **Bildbereich** von f.

Zwei Funktionen $f_1 : A_1 \to B_1$ und $f_2 : A_2 \to B_2$ sind **gleich**, geschrieben $f_1 = f_2$, genau dann wenn $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ und

$$f_1(x) = f_2(x)$$

für alle $x \in A_1$ gilt.

Häufig wird eine Funktion durch eine konkrete Berechnungsvorschrift wie z.B.

$$f(x) := x^2 \tag{1.3.2}$$

angegeben. Ohne Angabe von Definitions- und Wertebereich spezifiziert dies aber noch keine Funktion. Setzen wir jedoch zusätzlich zum Beispiel $A := [0, 1]$ und $B := \mathbb{R}$, so wird aus der obigen Berechnungsvorschrift (1.3.2) eine Funktion. Ändern wir dann B in $B := [0, \infty)$ um, erhalten wir eine andere Funktion, während das Ersetzen von der Berechnungsvorschrift (1.3.2) zu

$$f(x) := (x + 1)^2 - 2x - 1$$

die Funktion auf $A := [0, 1]$ und $B := \mathbb{R}$ nicht ändert.

Ist A eine Menge so heißt die Abbildung $\mathbf{id}_A : A \to A, x \mapsto x$ **Identität** auf A. Ist $A \subset B$, so heißt die Abbildung $\mathbf{id}_{A,B} : A \to B, x \mapsto x$ **Inklusionsabbildung**. Obwohl beide Abbildungen die gleiche Berechnungsvorschrift haben sind sie nur im Fall $B = A$ auch tatsächlich gleich.

Ist A eine Menge und $B \subset A$ so heißt die Abbildung $\mathbf{1}_B : A \to \{0, 1\}$

$$\mathbf{1}_B(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in B \\ 0\,, & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Indikatorfunktion von B. Häufig wird auch der Bildbereich $\mathbb{R}$ betrachtet.

Sei A die Menge aller Autos, die am 31.12.2021 in Stuttgart gemeldet waren, und B die Menge aller möglichen Kennzeichenkombinationen. Dann ist $f : A \to B$ mit

$$f(x) := \text{Kennzeichen}(x)\,, \qquad x \in A \tag{1.3.3}$$

eine Abbildung. Umgekehrt können wir aus $g(y) :=$ Auto mit Kennzeichen(y) keine Abbildung $g : B \to A$ erstellen, da nicht jede mögliche Kennzeichenkombination auch vergeben war. An diesem Beispiel sieht man auch, dass die "Berechnungsvorschriften" sehr willkürlich sein kann.

Die folgende Definition führt ein paar weitere wichtige Begriffe für Abbildungen ein.

Definition 1.3.6

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$. Dann heißt

i). $\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\}$ der **Graph** von f.

ii). $f(A_0) := \{f(x) : x \in A\}$ das **Bild** von A_0 unter f.

iii). $f^{-1}(B_0) := \{x \in A : f(x) \in B_0\}$ das **Urbild** von B_0 unter f.

Ferner heißt die Funktion $f_{|A_0} : A_0 \to B$, die durch $f_{|A_0}(x) := f(x)$ für alle $x \in A_0$ gegeben ist, die **Einschränkung** von f auf A_0.

Funktionen können auf verschiedene Arten visualisiert werden, wie in den Abbildungen 43 und 3 illustriert ist.

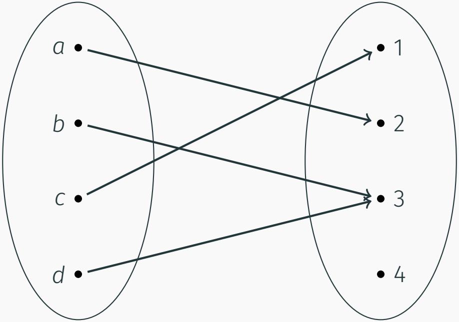


Abbildung: Schematische Darstellung einer Abbildung von einer Menge A (links) in eine Menge B (rechts). Die Pfeile deuten das Verhalten der Abbildung an, wie z.B. $f(b) = 3$.

Since $A, B \subset \mathbb{R}$, so lassen sich Funktionen auch einem aus der Schule bekannten Koordinatensystem darstellen. Ein Beispiel einer solchen Darstellung und 2 Beispiele von Relationen, die keine Funktionen sind findet sich in Abbildung 3.

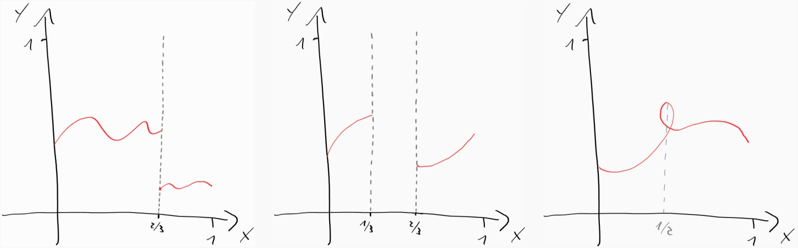


Abbildung: Illustrationen für drei Relationen (jeweils in rot) auf $[0,1]^2$. **Links:** Eine Relation, die sogar eine Funktion ist. **Mitte:** Eine Relation, die keine Funktion ist, da zwischen 1/3 und 2/3 kein Funktionswert zugewiesen wird. **Rechts:** Eine Relation, die keine Funktion ist, da z.B. für $x = 1/2$ kein eindeutiger Funktionswert existiert.

In vielen Fällen erfüllen Abbildungen zusätzliche Eigenschaften. Die folgende Definition stellt drei grundlegende vor.

Definition 1.3.7

Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Dann heißt f:

i). **injektiv**, genau dann wenn gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2 \,.$$

ii). **surjektiv**, genau dann wenn $f(A) = B$ gilt, d.h.

$$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y \,.$$

iii). **bijektiv**, genau dann wenn sie injektiv und surjektiv ist, d.h.

$$\forall y \in B \exists ! x \in A : f(x) = y \,.$$

BEISPIELE

Für $A = B = \mathbb{R}$ ist die durch (1.3.2) gegebene Funktion weder injektiv noch surjektiv. Betrachten wir jedoch $A = [0, \infty)$ und $B = \mathbb{R}$ so wird sie injektiv, während wir für $A = \mathbb{R}$ und $B = [0, \infty)$ eine surjektive. Funktion bekommen. Für $A = B = [0, \infty)$ erhalten wir schließlich eine bijektive Funktion.

Die Inklusionsabbildung ist immer injektiv und sie ist surjektiv genau dann wenn $B = A$ gilt. Indikatorfunktionen sind "fast nie" injektiv und "meistens" surjektiv für den Bildbereich $\{0, 1\}$.

Die um (1.3.3) beschriebene "Kennzeichenabbildung" ist injektiv aber nicht surjektiv.

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in B$ genau ein $x_y \in A$ mit $f(x_y) = y$. Damit können wir eine neue Abbildung $f^{-1} : B \to A$ durch

$$f^{-1}(y) := x_y\,, \qquad\qquad y \in Y$$

definieren. Die Abbildung f^{-1} heißt **Umkehrabbildung** oder **Umkehrfunktion** von f. Wie man sich leicht überlegt, ist f^{-1} ebenfalls bijektiv und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Die folgende Definition führt eine weitere Operation für Abbildungen ein.

Definition 1.3.8

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen, so heißt die durch

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die **Komposition** von f und g

Die Komposition von Abbildungen ist **assoziativ**, d.h. es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

und aus diesem Grund schreibt man meistens nur $h \circ g \circ f$. Andererseits ist die Komposition im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h. es gibt Funktionen f und g mit

$$g \circ f \neq f \circ g\,.$$

Für $A = B = C = \mathbb{R}$ ist dies zum Beispiel für $f(x) := x^2$ und $g(x) := x + 1$ der Fall, denn es gilt:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(x^2) = x^2 + 1\,, \\ f \circ g(x) &= f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\,, \end{aligned}$$

und damit $g \circ f(1) = 2 \neq 4 = f \circ g(1)$.

Schließlich gilt $f \circ \mathbf{id}_A = f$ und $\mathbf{id}_B \circ f$ für alle $f : A \to B$.

Ist $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung so gelten zusätzlich die Formeln

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \,,$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \;.$$

Ist ferner $g : B \to C$ eine weitere bijektive Abbildung, so ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \,.$$

Schließlich gilt immer $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.

Für $n \geq 3$ hatten wir schon in Abschnitt 26 n-Tupel und n-fache Produkte A^n eingeführt. Dies war allerdings nicht wirklich formal sauber. Mit Hilfe von Abbildungen können wir dies jetzt nochmal formal korrekt wiederholen.

Für $n \geq 3$ sei dazu $I := \{1, 2, \ldots, n\}$. Ein n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ in A kann dann als Abbildung

$$\begin{aligned} I &\to A \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

aufgefasst werden. Umgekehrt kann jede solche Abbildung wegen der Ordnung auf I als n-Tupel aufgefasst werden. Formal werden daher n-Tupel als Abbildungen definiert, wobei im allgemeinen Fall $A_1, \ldots, A_n$ noch etwas mehr Arbeit notwendig ist, um die zunächst betrachteten Abbildungen $I \to A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$ geeignet einzuschränken.

Diese Einsicht wird uns demnächst nützlich sein, wenn wir unendlich lange Tupel einführen werden.

CHAPTER 2: ZAHLEN

Section 2.1
Natürliche Zahlen

Definition 2.1.1

Eine Menge $\mathbb{N}$ heißt Menge der **natürlichen Zahlen**, falls die folgenden fünf **Peano-Axiome** erfüllt sind:

P1 Es existiert ein besonderes Element $1 \in \mathbb{N}$.

P2 Zu jedem Element $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein weiteres Element $n' \in \mathbb{N}$, das als der **Nachfolger** von n bezeichnet wird.

P3 Das Element 1 ist selbst kein Nachfolger, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 1.$$

P4 Die Nachfolger-Abbildung $n \mapsto n'$ auf $\mathbb{N}$ ist injektiv, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ folgt aus $n' = m'$, dass $n = m$.

P5 **Induktionsaxiom:** Besitzt eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ die Eigenschaften

i). $1 \in M$

ii). $\forall n \in M : n' \in M$

so gilt $M = \mathbb{N}$.

Wir nutzen die übliche Notation und bezeichnen $2 := 1'$, $3 = 2'$, etc.

BEMERKUNGEN

Man kann zeigen, dass es tatsächlich eine Menge $\mathbb{N}$ gibt, die alle fünf Peano-Axiome erfüllt.

Ferner bestimmen die Peano-Axiome die Menge $\mathbb{N}$ im wesentlichen eindeutig: Wenn zwei Mengen $\mathbb{N}$ und $\widetilde{\mathbb{N}}$ die Eigenschaften P1 bis P5 besitzen, dann kann man zeigen, dass eine eindeutig bestimmte Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \widetilde{\mathbb{N}}$ zwischen diesen Mengen existiert mit $\varphi(1) = \widetilde{1}$ und $\varphi(n') = \varphi(n)'$. Bis auf eine Umbenennung der Elemente haben wir damit durch die Eigenschaften P1 bis P5 die natürlichen Zahlen charakterisiert.

BEMERKUNGEN

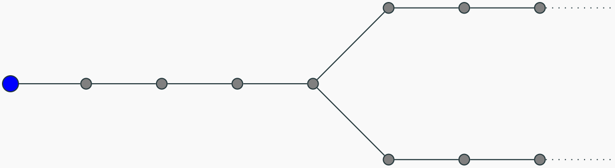
Die Axiome charakterisieren die natürlichen Zahlen als eine nicht abbrechende Reihe von Elementen verbunden durch die Nachfolgeroperation,

wobei die 1 als blauer Punkt dargestellt ist, und der Nachfolger n' einer Zahl n direkt rechts von ihr steht und mit einer Linie mit ihr verbunden ist.

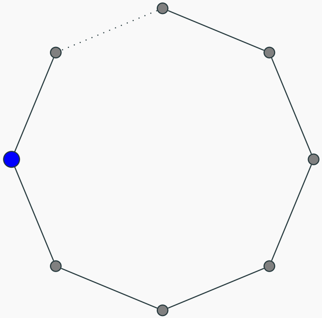
Wir überlegen uns kurz, dass dieses Bild die natürlichen Zahlen richtig illustriert, indem wir zeigen, was die einzelnen Axiome ausschließen.

Das Axiom **P2** schließt aus, dass die Zahlenreihe aufhört, oder ein “Loch” hat

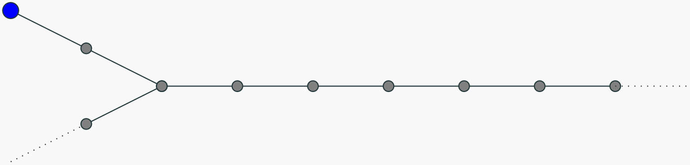
oder aber sich an einer Stelle verzweigt



Axiom **P3** verhindert, dass die Zahlen zyklisch verlaufen,

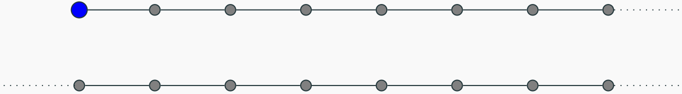


Axiom **P4** schließt Zusammenführungen der Form



aus.

P5 schließt Bereiche aus, welche nicht nach endlich vielen Schritten von 1 aus gesehen erreichbar sind



Mit Hilfe der Axiome von Peano können wir auf $\mathbb{N}$ die Addition definieren. Dazu fixieren wir ein $m \in \mathbb{N}$ und definieren $n \in \mathbb{N}$:

$$m + 1 := m' \,,$$
$$m + n' := (m + n)' \,,$$

wobei n' der Nachfolger von n ist und $(m+n)'$ der Nachfolger von $m+n$. Aus dem Induktionsaxiom schließen wir nun, dass wir damit $m+n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erklärt haben, und da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, auch für alle $m \in \mathbb{N}$.

Eine solche Definition heißt **rekursiv** und sie ist für $\mathbb{N}$ typisch. Um eine Größe A_n für jede natürliche Zahl n zu definieren, genügen nach dem Induktionsaxiom die folgenden beiden Schritte:

Rekursionsanfang (RA): Festlegung, was A_1 ist.

Rekursionsschritt (RS): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Größe A_{n+1} mit den Größen $A_1, \ldots, A_n$ auszudrücken.

Rekursive Ansätze spielen aber auch in der Informatik eine wichtige Rolle, z.B. bei der Behandlung von sogenannten Bäumen.

Neben der Addition kann auch die Multiplikation rekursiv definiert werden. Dazu fixieren wir wieder ein $m \in \mathbb{N}$ und definieren für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &:= m\,, \\ m \cdot n' &:= m \cdot n + m\,, \end{aligned}$$

wobei wir annehmen, dass wir die Addition schon wie oben definiert haben. Schließlich definieren wir die Relation $<$ auf $\mathbb{N}$ durch

$$m < n \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists r \in \mathbb{N} : n = m + r\,.$$

Damit können wir auch die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ durch

$$m < n \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (m < n \vee m = n)\,.$$

Im folgenden setzen wir diese Operationen und Relationen sowie ihre Gesetzmäßigkeiten als bekannt voraus.

Ähnlich wie bei der Rekursion kann man die Peano-Axiome auch zum Beweis von Aussagen über naürliche Zahlen nutzen. Sei dazu $q(n)$ eine Aussageform über naturliche Zahlen n. Wenn wir zeigen wollen, dass $q(n)$ für jede natürliche Zahl n wahr ist, d.h., dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : q(n) \tag{2.1.1}$$

wahr ist, gehen wir dazu wie folgt vor:

Induktionsanfang (IA): Wir zeigen, dass $q(1)$ wahr ist.

Induktionsschritt (IS): Wir zeigen, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \big(q(n) \;\Rightarrow\; q(n+1)\big)$$

wahr ist. Dabei wird $q(n)$ Induktionsvoraussetzung (IV) genannt und $q(n+1)$ Induktionsbehauptung.

Mit anderen Worten zeigen wir für die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} : q(n)\},$$

dass $1 \in M$ und für alle $n \in M$ auch $n' \in M$ gilt. Nach dem Induktionsaxioms wissen wir dann, dass $M = \mathbb{N}$ gilt und damit ist (2.1.1) tatsächlich bewiesen.

Alternativ kann man im Induktionsschritt nicht nur $q(n)$ benutzen, sondern sogar $q(1), \dots, q(n)$, d.h. es reicht zu zeigen, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Big(\big(q(1) \land \cdots \land q(n)\big) \;\Rightarrow\; q(n+1) \Big)$$

wahr ist.

Manchmal sind Aussagen erst ab einer gewissen Zahl n_0 wahr. In diesem Fall ist im Induktionsanfang $q(n_0)$ zu beweisen und im Induktionsschritt zeigt man dann nur $q(n_0) \;\Rightarrow\; q(n+1)$, bzw. $\big(q(n_0) \land \cdots \land q(n)\big) \;\Rightarrow\; q(n+1)$ für alle $n \geq n_0$. Dies gilt insbesondere, wenn man Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$ beweisen möchte.

Die aus der Schule bekannten Gesetzmäßigkeiten für die Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ können über vollständige Induktion bewiesen werden. Dies wollen wir hier aber nicht vertiefen.

Um die vollständige Induktion an einem Beispiel zu betrachten, wollen wir das folgende Lemma zeigen, zu dem es auch eine Anekdote von Gauss gibt.

Lemma 2.1.2

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis.

Induktionsanfang: Hier müssen die Aussage für $n = 1$ zeigen, d.h. $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Das ist aber offensichtlich wahr.

Induktionsschritt: Hier fixieren wir ein $n \in \mathbb{N}$ und nehmen als Induktionsvoraussetzung an, dass die Aussage für dieses n wahr ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &= (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

und damit ist die Aussage auch auch für $n + 1$, d.h. die Induktionsbehauptung gezeigt. □

Im folgenden sei n immer eine natürliche Zahl. Dann wird die Fakultät von n durch

$$1! := 1\,, \qquad\qquad (n+1)! := n! \cdot (n+1)$$

definiert. Haben wir ferner Zahlen $a_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ so definieren wir für $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$:

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m\,, \qquad\qquad \sum_{k=m}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=m}^{n} a_k$$

und

$$\prod_{k=m}^{m} a_k := a_m\,, \qquad\qquad \prod_{k=m}^{n+1} a_k = a_{n+1} \cdot \prod_{k=m}^{n} a_k\,.$$

Diese Schreibweisen sind im Zweifelsfrei präziser als z.B. $a_1 + \cdots + a_n$, während die letztere suggestiver ist.

Section 2.2
Kombinatorik

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Zählen von Objekten in einer Menge beschäftigen.

Eine Menge A heißt **n-elementig**, falls es eine Bijektion $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt. Die Zahl n heißt dann die **Anzahl** der Elemente von A oder auch die **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** von A und wir schreiben dafür

$$|A| := \#A := n\,.$$

Die Anzahl ist eindeutig bestimmt, da es für verschiedene natürliche Zahlen $n \neq m$ keine Bijektion $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ geben kann.

Eine Menge A, für die eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ existiert, heißt **unendlich**. Existiert keine solche injektive Abbildung, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|A| = n$ und wir sagen die Menge A ist **endlich**. Wir vereinbaren weiter, dass $|\emptyset| := 0$ gilt.

Sind A und B zwei n-elementige Mengen und $f : A \to \{1, \ldots, n\}$ und $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ zwei Bijektionen, so ist $h := g^{-1} \circ f : A \to B$ eine Bijektion. Gibt es umgekehrt eine Bijektion $h : A \to B$ zwischen zwei beliebigen endlichen Mengen A und B, so gilt $|A| = |B|$.

Theorem 2.2.1

Seien A und B endliche Mengen, Dann gilt:

i). $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

ii). $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

i). Sind A und B disjunkt, so gilt offensichtlich $|A \cup B| = |A| + |B|$. Im Allgemeinen Fall betrachten wir zunächst $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Da A und $(B \setminus A)$ disjunkt sind folgt

$$|A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A| \,. \tag{2.2.1}$$

Schließlich gilt $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, und da $B \setminus (A \cap B)$ und $A \cap B$ disjunkt sind, folgt wegen $B = (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$:

$$|B| = |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| = |B \setminus A| + |A \cap B| \,.$$

Damit haben wir $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$ und Einsetzen in (2.2.1) ergibt die Behauptung.

ii). Seien $m := |A|$ und $n := |B|$, sowie $f : A \to \{1, \ldots, m\}$ und $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ zwei Bijektionen. Dann ist

$$\begin{aligned} A \times B &\to \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \\ (a, b) &\mapsto \big(f(a), g(b)\big) \end{aligned}$$

eine Bijektion. Die Menge $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ kann man sich rechteckig angeordnet denken und zeilenweise gezählt ergeben sich mn Elemente.

Seien A und B Mengen, so schreiben wir $B^A := \{f \mid f : A \to B\}$ für die Menge der Abbildungen von A nach B. Der folgende Satz bestimmt die Mächtigkeit von B^A.

Theorem 2.2.2

Seien A und B endliche Mengen. Dann gilt $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Wir schreiben $m := |A|$ und $n := |B|$ und führen den Beweis über Induktion über m.

Induktionsanfang: Für $m = 1$, haben wir $A = \{a\}$ und jede Abbildung $f : A \to B$ ist durch Angabe von $f(a) \in B$ eindeutig bestimmt. Wegen $|B| = n$ haben wir hierfür n verschieden Werte und damit folgt $|B^A| = |B| = n^1$.

Induktionsschritt: Sei $|A| = m + 1$ und $a \in A$. Wir setzen $A' := A \setminus \{a\}$. Dann gilt $|A'| = m$ nach Satz 2.2.1 und daher wissen wir nach Induktionsvoraussetzung, dass $|B^{A'}| = |B|^{|A'|}$ gilt.

Sei nun $f : A \to B$. Dann ist $f_{|A'} \in B^{A'}$ und $f(a) \in B$ und ferner wird f eindeutig durch Angabe von $f_{|A'}$ und $f(a)$ bestimmt. Umgekehrt kann jede Funktion $g : A' \to B$ eindeutig zu einer Funktion auf A fortgesetzt werden, indem man den Funktionswert $g(a)$ festlegt. Formal erhalten wir also eine Bijektion

$$\begin{aligned} B^A &\to B^{A'} \times B \\ f &\mapsto (f_{|A'}, f(a)) \end{aligned}$$

Damit folgt $|B^A| = |B^{A'} \times B| = |B^{A'}| \cdot |B| = n^m \cdot n = n^{m+1} = |B|^{|A|}$ mit Satz 2.2.1.

Mit Hilfe des Satzes 2.2.2 können wir jetzt die Mächtigkeit von Potenzmengen bestimmen.

Korollar 2.2.3

Sei A eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Wir setzen $B := \{0, 1\}$ und bemerken, dass $|B| = 2$ gilt. Dann lässt sich jede Teilmenge C von A durch ihre Indikatorfunktion $\mathbf{1}_C$ eindeutig beschreiben. Wir haben daher eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &\to B^A \\ C &\mapsto \mathbf{1}_C\,. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.2.2.

Sei A eine endliche Menge, so wissen wir bereits, dass es $|A|^{|A|}$ Abbildungen $A \to A$ gibt? Wir wollen nun untersuchen, wie viele **Permutationen**, d.h. bijektive Abbildungen $A \to A$ es gibt. Im folgenden schreiben wir dazu

$$\mathrm{Perm}(A) := \{f : A \to A \,|\, f \text{ bijektiv}\}\,.$$

Gilt $|A| = n$ und sind $a_1, \ldots, a_n$ die Elemente von A, dann ergibt jede Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine andere Anordnung $(a_{\pi(i)}, \ldots, a_{\pi(n)})$ dieser Elemente. Die Anzahl von Umordnungen oder Anordnungen dieser Elemente ist daher gleich der Anzahl von Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Theorem 2.2.4

Sei A eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathrm{Perm}(A)| = |A|!$.

Informell kann man sich dies am Mischen von Karten klar machen: Für $n = 1$ gilt es nur eine Anordnung. Haben wir schon n Karten gemischt (mit $n!$ Anordnungen nach Induktionsvoraussetzung), dann haben wir genau $n + 1$ Möglichkeiten, eine $(n + 1)$-te Karte in diese n Karten einzusortieren. Zusammen ergibt dies $n! \cdot (n + 1) = (n + 1)!$ Anordnungen.

Es reicht, die Menge $A_n := \{1, \dots, n\}$ zu betrachten. Wir führen einen Induktionsbeweis über n.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gibt es genau eine bijektive Abbildung $\{1\} \to \{1\}$.

Induktionsschritt: Für jedes $b \in A_{n+1}$ fixieren wir zunächst eine Bijektion $h_b : A_{n+1} \setminus \{b\} \to A_n$.

Wie im Beweis von Satz 2.2.2 können wir jede Abbildung $f : A_{n+1} \to A_{n+1}$ in $f_{|A_n}$ und $b := f(n+1)$ eindeutig zerlegen. Ist f bijektiv, so gilt $f(n+1) \notin f(A_n) = f_{|A_n}(A_n)$. Ferner ist die Abbildung $f_{|A_n} : A_n \to A_{n+1} \setminus \{b\}$ bijektiv und damit ist $h_b \circ f_{|A_n} \in \mathrm{Perm}(A_n)$. Insgesamt erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Perm}(A_{n+1}) &\to \mathrm{Perm}(A_n) \times A_{n+1} \\ f &\mapsto \left(h_{f(n+1)} \circ f_{|A_n}, f(n+1)\right). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir $|\mathrm{Perm}(A_n)| = n!$ und mit $|A_n| = n+1$ und Satz 2.2.1 folgt dann die Behauptung.

Für $k, n \in\in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten** durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}\,, \tag{2.2.2}$$

wobei $0! := 1$ gesetzt wird.

Theorem 2.2.5

Sei A eine n-elementige Menge und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Da gibt es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen von A, d.h.

$$\big|\{B \subset A : |B| = k\}\big| = \binom{n}{k}\,.$$

Beim Lotto "6 aus 49" gibt es beispielsweise $\binom{49}{6} = 13.983.816$ Möglichkeiten, 6 Kugeln aus den 49 Kugeln zu ziehen.

BEWEIS

Die Gesamtzahl der möglichen Anordnungen von k verschiedenen Elementen aus A_n ist

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)\,,$$

wie man sich leicht durch sukzessives Ziehen und Anordnen von Elementen aus A_n ohne Zurücklegen klar machen kann. Ignoriert man Anordnung, so fallen alle Kombinationen zusammen, die durch Umordnung entstehen, d.h., jeweils $k!$ Kombinationen fallen zusammen. Wegen

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

folgt die Behauptung.

Die Berechnung der Binomialkoeffizienten mit Hilfe von (2.2.2) ist im Allgemeinen zu aufwendig. Der folgende Satz bietet eine alternative, rekursive Berechnung, die nur auf Addition beruht.

Theorem 2.2.6

Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$ gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Mit Bruchrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}+\frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Ferner ist $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ offensichtlich.

Die Rekursionsformel kann man sich am Pascal'schem Dreieck illustrieren, wobei die Zeilen von oben nach unten mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ nummeriert sind und die "Spalten" von links nach rechts mit $k = 0, \ldots, n$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Die hervorgehobenen Zahlen zeigen $\binom{6}{2}$ und die zur rekursiven Berechnung notwendigen Binomialkoeffizienten mit $n < 6$. Die Spitze, die für $\binom{0}{0}$ steht, ist streng genommen zur Berechnung nicht notwendig, da immer schon bei $\binom{1}{0}$ oder $\binom{1}{1}$ abgebrochen werden kann.

Für große n und k kann man Binomialkoeffizienten, oder allgemeiner Fakultäten, auch durch die Stirling'sche Formel approximativ berechnen:

$$
\mathrm{e}^{\frac{1}{1+12n}} \leq \frac{n!\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}, \qquad n \geq 1.
$$

Binomialkoeffizienten sind für eine Vielzahl von Berechnungen nützlich. An dieser Stelle wollen nur den sogenannten binomischen Lehrsatz erwähnen.

Theorem 2.2.7

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Der Beweis wird durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ geführt.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 = (a+b)^0 .$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Formel für n wahr ist. Um zu zeigen, dass sie auch für $n+1$ wahr ist, betrachten wir die Rechnung

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \quad \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} \quad + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 2.2.6 verwendet haben.

Section 2.3
Ganze und Rationale Zahlen

Ausgehend von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kann man die **ganzen Zahlen** gewinnen:

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \{m - n : m \in \mathbb{N}_0 \land n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Möchte man dies formal sauber konstruieren, kann man z.B. auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die Äquivalenzrelation

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \tag{2.3.1}$$

definieren, die Zahlenpaare zusammenfasst, die die gleiche Differenz haben. Jede Äquivalenzklasse $[(m, n)]_\sim$ entspricht dann einer ganzen Zahl $m - n$.

Die Addition auf diesen "ganzen Zahlen" wird durch

$$[(m_1, n_1)]_\sim + [(m_2, n_2)]_\sim := [(m_1 + m_2, n_1 + n_2)]_\sim$$

definiert, wobei man aufpassen muss, dass dies von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist. Diese Konstruktion wollen wir nicht vertiefen, sondern nur in Abbildung 4 illustrieren.

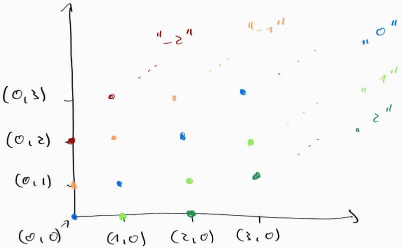


Abbildung: Konstruktion der ganzen Zahlen mit Hilfe der Äquivalenzrelation (2.3.1). Jede Diagonale entspricht einer Äquivalenzklasse und somit einer ganzen Zahl. Naheliegende Repräsentanten liegen auf den Achsen, wobei $(m, 0)$ die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ repräsentieren und $(0, n)$ die "negativen Zahlen" $-\mathbb{N}_0$ repräsentieren.

Es kann gezeigt werden, dass die ganzen Zahlen zusammen mit der Addition eine kommutative Gruppe im Sinne der folgenden Definition bilden.

Definition 2.3.1

Sei G eine Menge und $\cdot : G \times G \to G$ eine Abbildung. Dann heißt $(G, \cdot)$ **Gruppe**, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

i). **Assoziativität:** Für alle $x, y, z \in G$ gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

ii). **Neutrales Element:** Es existiert ein Element $1 \in G$, so dass für alle $x \in G$ gilt: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

iii). **Inverses Element:** Für alle $x \in G$ existiert ein $x^{-1} \in G$ mit $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Ist ferner $\cdot$ **kommutativ**, d.h. es gilt $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in G$, dann heißt $(G, \cdot)$ **kommutative Gruppe** oder **Abel'sche Gruppe**.

In einer Gruppe $(G, \cdot\,)$ kann es nur ein neutrales Element geben, denn wenn 1 und $1'$ neutrale Elemente sind, so folgt $1 = 1 \cdot 1' = 1'$. Ferner ist jedes inverse Element eindeutig. Denn wenn es zu $x \in G$ zwei inverse Elemente x^{-1} und $\tilde{x}$ gibt, so folgt

$$\tilde{x} = \tilde{x} \cdot 1 = \tilde{x} \cdot (x \cdot x^{-1}) = (\tilde{x} \cdot x) \cdot x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}\,.$$

Damit hat die Gleichung $a \cdot x = b$ für feste $a, b \in G$ genau eine Lösung x, nämlich $x = a^{-1} \cdot b$. Entsprechend hat die Gleichung $x \cdot a = b$ die eindeutige Lösung $x = b \cdot a^{-1}$. Ähnlich leicht lassen sich die Formeln

$$1^{-1} = 1\,, \qquad (x^{-1})^{-1} = x \qquad \text{und} \qquad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

nachweisen.

Ist A eine Menge und $\mathrm{Perm}(A)$ die Menge alle Bijektionen $A \to A$, dann ist $(\mathrm{Perm}(A), \circ)$ eine Gruppe, wobei id_A das neutrale Element ist und die Umkehrabbildung f^{-1} zu einem $f \in \mathrm{Perm}(A)$ ist das inverse Element. Im allgemeinen ist $(\mathrm{Perm}(A), \circ)$ aber nicht kommutativ, vgl. auch Seite 48.

Für $(\mathbb{Z}, +)$ sind die Assoziativität und Kommutativität aus der Schule bekannt. Das neutrale Element ist die 0 und für $k \in \mathbb{Z}$ ist $-k$ das inverse Element. In unserer Konstruktion (2.3.1) gilt $0 = [(0,0)]_\sim$ und $-k = [(n,m)]_\sim$ für $k = [(m,n)]_\sim$. Damit ist $(\mathbb{Z}, +)$ tatsächlich eine kommutative Gruppe.

Für $k, m \in \mathbb{Z}$ definieren wir die **Subtraktion** als

$$k - m := k + (-m)\,.$$

Schließlich können wir auf $\mathbb{Z}$ auch eine Totalordnung durch

$$[(m_1, n_1)]_\sim \geq [(m_2, n_2)]_\sim \qquad :\Longleftrightarrow \qquad m_1 + n_2 \geq m_2 + n_1$$

definieren, wobei wir die Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus (2.3.1) zugrunde gelegt haben. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ entsprechen dann den ganzen Zahlen $[(m,n)]_\sim \geq [(0,0)]_\sim$, was gleichbedeutend mit $m \geq n$ ist.

Während die Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ ohne Probleme definiert werden kann, ist das Dividieren von Zahlen in $\mathbb{Z}$ nur sehr eingeschränkt möglich. Um dieses Problem zu beheben, betrachten wir die **rationalen Zahlen**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{2.3.2}$$

Auch hier kann man diese recht informelle Definition formalisieren, indem man z.B. auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ die Äquivalenzrelation

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

betrachtet, die Paare mit gleichem "Quotienten" zusammenfasst. Der Ausdruck $\frac{m}{n}$ wird entsprechend durch $[(m, n)]_\sim$ formalisiert.

Addition und Multiplikation können durch

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$
$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$$

definiert werden, wobei man überprüfen muss, dass "äquivalente" Brüche das Ergebnis nicht verändern. Die entsprechenden Rechnungen sind nicht schwierig aber zeitaufwändiger.

In der Darstellung (2.3.2) entsprechen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ den Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $n = 1$. Es ist offensichtlich, dass auf diese Weise die eben definierte Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ der auf $\mathbb{Z}$ entspricht.

Weitere elementare Rechnungen zeigen, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper im Sinne der folgenden Definition bilden.

Definition 2.3.2

Sei K eine Menge und $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ zwei Abbildungen. Dann heißt $(K, +, \cdot)$ **Körper**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0.
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1.
3. **Distributivgesetz:** Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

In der Darstellung (2.3.2) von $\mathbb{Q}$ ist $\frac{0}{1}$ das neutrale Element der Addition und $\frac{1}{1}$ das neutrale Element der Multiplikation. Ferner ist $\frac{-m}{n}$ das additive Inverse zu $\frac{m}{n}$. Schließlich ist das multiplikative Inverse von $\frac{m}{n}$ mit $m \neq 0$ entweder $\frac{n}{m}$ oder $\frac{-n}{-m}$, je nachdem, ob $m > 0$ oder $m < 0$ ist.

Ist $(K, +, \cdot\,)$ ein Körper, so gilt $1 \neq 0$, denn das neutrale Element 1 der Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot\,)$ muss $1 \in K \setminus \{0\}$ erfüllen.

Für $x \in K$ gilt immer $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, denn das Distributivgesetz zusammen mit der neutralen Eigenschaft der 0 ergibt

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x\,.$$

Durch Addition von $-(0 \cdot x)$ auf beiden Seiten bekommen wir dann $0 \cdot x = 0$.

Die Eigenschaft $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in K$ zeigt, dass es kein multiplikatives Inverses $0^{-1} \in K$ von 0 geben kann, denn sonst hätten wir ja $0 \cdot 0^{-1} = 1$.

Haben wir $x, y \in K$ mit $x \cdot y = 0$, so gilt $x = 0$ oder $y = 0$. Ist beispielsweise $x \neq 0$, so folgt $y = y \cdot (x \cdot x^{-1}) = (y \cdot x) \cdot x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$.

Für $x \in K$ gilt $(-1)x = -x$, wie die folgende Rechnung zusammen mit der Eindeutigkeit von $-x$ zeigt:

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0\,.$$

Hieraus können wir dann auch leicht $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$ und $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$ folgern.

In Körpern wird häufig der Multiplikationspunkt "$\cdot$" weggelassen, d.h. wir schreiben $xy := x \cdot y$. Außerdem definieren wir die die **Subtraktion** und die **Division** durch

$$x - y := x + (-y) \qquad \text{und} \qquad \frac{x}{y} := xy^{-1}\,,$$

wobei für die Division $y = 0$ natürlich ausgeschlossen ist. Die letzte Schreibweise steht dabei nicht im Widerspruch zu unserer Darstellung (2.3.2) von $\mathbb{Q}$.

Neben der Addition und Multiplikation können wir auf $\mathbb{Q}$ auch eine Totalordnung definieren. Benutzen wir die Darstellung (2.3.2), so können wir diese durch

$$\frac{m_1}{n_1} \leq \frac{m_2}{n_2} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad m_1 n_2 \leq m_2 n_1$$

definieren. Den leichten Nachweis, dass dies wohldefiniert ist und tatsächlich eine Totalordnung ergibt, überspringen wir wieder aus Zeitgründen.

In der Darstellung (2.3.2) entsprechen, wie schon erwähnt, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ den Brüchen $\frac{m}{n}$ mit $n = 1$. Es ist offensichtlich, dass auf diese Weise die oben definierte Totalordnung der auf $\mathbb{Z}$ entspricht.

Die eben definierte Totalordnung verträgt sich mit der Addition und Multiplikation im Sinne der folgenden Definition.

Definition 2.3.3

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\leq$ eine Totalordnung auf K. Dann heißt $(K, +, \cdot, \leq)$ **(an)geordneter Körper**, falls für alle $x, y \in K$ mit $x \leq y$ und alle $s \in K$ und $t \geq 0$ gilt:

$$x + s \leq y + s \,, \tag{2.3.3}$$

$$t \cdot x \leq t \cdot y \,. \tag{2.3.4}$$

Im folgenden benutzen wir $\leq$, um den Relationen $<$, $\geq$ und $>$ die üblichen Bedeutungen zu geben. Ist insbesondere $x < y$, so können wir $\leq$ in (2.3.3) durch $<$ ersetzen und im Falle $t > 0$ gilt dies auch für (2.3.4). Außerdem sichert die Anti-Symmetrie und die Vergleichbarkeit, dass für $x, y \in K$ immer genau eine der folgenden drei Aussagen wahr ist: $x < y$, $x = y$ oder $x > y$.

In jedem geordneten Körper gelten die üblichen “Vergleichs-Regeln”. Zum Beispiel gilt

$$x \leq y \qquad \Longrightarrow \qquad -y \leq -x \tag{2.3.5}$$

wie aus (2.3.3) mit $s := -y - x$ leicht folgt. Ferner gilt für alle $y \in K$, dass

$$y \cdot y \geq 0\,, \tag{2.3.6}$$

denn im Fall $y \geq 0$, folgt $0 = y \cdot 0 \leq y \cdot y$ aus (2.3.4) mit $x := 0$ und $t := y$ und im Fall $y \leq 0$ wissen wir schon $-y \geq 0$ und damit folgt ebenfalls $y \cdot y = (-y) \cdot (-y) \geq 0$. Für $y := 1$ erhalten wir insbesondere

$$1 > 0\,, \tag{2.3.7}$$

da $0 \neq 1$ in jedem Körper gilt. Daraus können wir wiederum

$$y > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y^{-1} > 0 \tag{2.3.8}$$

schließen, denn wäre $y^{-1} \leq 0$, so würde aus (2.3.4) mit $x := y^{-1}$ und $t := y$

$$1 = y \cdot y^{-1} \leq y \cdot 0 = 0$$

folgen. Ein doppeltes Anwenden von (2.3.8) und (2.3.4) liefert dann die zu (2.3.5) analoge Implikation $0 < x \leq y \Rightarrow 0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.

Wir betrachten ein Beispiel und formen die beiden Ungleichungen

$$-3a - 2 \leq 5 \leq -3a + 4$$

äquivalent um. Mit den oben gezeigten Regeln folgt

$$-3a - 2 \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -3a \leq 7 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{3} \leq a$$

und

$$5 \leq -3a + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq -3a \quad \Leftrightarrow \quad a \leq -\frac{1}{3}$$

und die beiden Ungleichungen sind damit zusammen äquivalent zu $-7/3 \leq a \leq -1/3$.

Neben den Axiomen eines geordneten Körpers erfüllt $\mathbb{Q}$ auch das sogenannte **Archimedische Axiom** wie der folgende Satz zeigt.

Theorem 2.3.4

Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ und $y > 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \cdot x > y$.

Beweis.

Wir betrachten die Darstellung (2.3.2), d.h. $x = \frac{m_1}{n_1}$ und $y = \frac{m_2}{n_2}$ mit $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Wir setzen $k := 2m_2n_1$. Aus $2m_1n_2 > 1$ folgt dann

$$y = \frac{m_2}{n_2} < 2m_1n_2 \cdot \frac{m_2}{n_2} = 2m_1m_2 = 2m_2n_1\frac{m_1}{n_1} = 2m_2n_1x$$

und mit der Definition von k erhalten wir $y < kx$. $\square$

Betrachten wir $\varepsilon := x$ und $y := 1$ so impliziert Satz 2.3.4, dass es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $1/n < \varepsilon$.

Section 2.4
Reelle Zahlen

Sind $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ und setzen wir $z := (x + y)/2$, so gilt $x < z < y$. Mit anderen Worten finden wir zwei beliebig nahe beieinander liegenden, unterschiedlichen rationalen Zahlen immer noch eine rationale Zahl, die zwischen diesen beiden liegt. Damit können wir uns $\mathbb{Q}$ als Zahlengerade vorstellen. Leider hat diese Gerade trotz der obigen Beobachtung Lücken. So ist die Länge der Diagonalen in einem Quadrat der Seitenlänge 1 nicht in $\mathbb{Q}$, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.4.1
Es gibt keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$.

BEWEIS

Angenommen, es gäbe eine solche rationale Zahl $r = \frac{m}{n}$, wobei wir wie üblich $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Offensichtlich ist $m = 0$ unmöglich und im Fall $m < 0$ ist $r = \frac{-m}{n}$ eine weitere Zahl, die $r^2 = 2$ erfüllt. Wir können daher zusätzlich $m \in \mathbb{N}$ annehmen. Schließlich können wir ohne Einschränkung annehmen, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist.

Aus $r^2 = 2$ folgt nun $m^2 = 2n^2$ und damit ist m^2 gerade. Wäre m ungerade, dann gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m = 2k - 1$. Wegen

$$m^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

wäre dann aber auch m^2 ungerade. Da letzteres falsch ist, muss m gerade sein. Damit gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $m = 2l$. Dies ergibt $4l^2 = m^2 = 2n^2$ und damit $2l^2 = n^2$. Mit anderen Worten ist n^2 gerade und ein Wiederholen des obigen Arguments zeigt uns dann, dass auch n gerade ist.

Damit sind sowohl m als auch n gerade, was im Widerspruch zu unserer Annahme des vollständig gekürzten Bruchs steht.

Um die Lücken zu schließen, suchen wir eine Menge $\mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\,,$$

so dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, der keine “Lücken mehr enthält”. Die Eigenschaften eines geordneten Körpers garantieren uns dabei, dass wir wie gewohnt rechnen und vergleichen zu können.

Dazu könnte man versuchen, Lösungen von “algebraischen” Gleichungen wie die obige zu den rationalen Zahlen “hinzuzufügen”. Da dies aber immer noch nicht Zahlen wie π oder e erzeugen würde, werden wir einen anderen Ansatz verfolgen, wobei wir aber die eigentliche Konstruktion aus Zeitgründen nicht ausführen, sondern nur die gewünschten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aufzählen.

Die folgenden beiden Axiome fassen unsere erste Forderung an $\mathbb{R}$ zusammen.

Körperaxiome. Es gibt eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ auf $\mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Ordnungsaxiome. Es gibt eine Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$, so dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper ist.

Man kann zeigen, dass jeder geordnete Körper K die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ “enthält”. Dies ist nicht ganz überraschend, denn $\mathbb{Q}$ ist ja durch, in gewissen Sinne minimale, Ergänzungen aus $\mathbb{N}$ entstanden und da $1 < 1+1 < \dots$ in jedem geordneten Körper K gilt, können wir $\mathbb{N}$ in K “wiederfinden”.

Da $\mathbb{Q}$ auch ein geordneter Körper ist, schließen diese Axiome alleine aber noch keine Lücke. Dies soll nun unser nächstes Ziel sein.

Definition 2.4.2

Sei K ein geordneter Körper, $M \subset K$ und $b \in K$. Dann heißt:

i). M **nach oben beschränkt**, falls es ein $b' \in K$ gibt mit $x \leq b'$ für alle $x \in M$. In diesem Fall heißt b' eine **obere Schranke** von M.

ii). b **Supremum** von M, geschrieben $\sup M := b$, falls b eine obere Schranke von M ist und für jede obere Schranke b' von M gilt $b \leq b'$.

Mit anderen Worten kann M höchsten ein Supremum besitzen und falls dieses existiert, ist es gleich der **kleinsten oberen Schranke** von M.

Die Existenz von Suprema in $\mathbb{Q}$ ist nicht automatisch erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.4.3

Die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ *ist nichtleer und nach oben beschränkt, hat aber kein Supremum in* $\mathbb{Q}$*.*

Offensichtlich gilt $1 \in M$, d.h. M ist nichtleer. Für jedes $x \in M$ gilt ferner $x \leq 2$, denn wäre $x > 2$ wahr, so würde $x^2 = x \cdot x > 2 \cdot 2 > 2$ gelten. Damit ist M nach oben beschränkt.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass jede obere Schranke b von M die Ungleichung $b^2 \geq 2$ erfüllt. Dazu nehmen wir $b^2 < 2$ an. Für $\varepsilon := 2 - b^2 > 0$ gibt es dann nach Satz 2.3.4 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $3b/n < \varepsilon$. Wir definieren $x := b + 1/n$. Dann gilt

$$x^2 = b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{3b}{n} < b^2 + \varepsilon = 2\,,$$

d.h. $x \in M$. Wegen $x = b + 1/n > b$ ist dann aber b keine obere Schranke von M. Die Annahme $b^2 < 2$ ist daher falsch.

Schließlich zeigen wir, dass M kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat. Wir nehmen dazu an, dass das Supremum $b := \sup M$ in $\mathbb{Q}$ existiert, d.h. $b \in \mathbb{Q}$. Da dann b eine obere Schranke ist, wissen wir $b^2 \geq 2$ aus unserer Vorüberlegung. Ferner ist $b^2 = 2$ nach Lemma 2.4.1 unmöglich ist, und daher gilt sogar $b^2 > 2$. Wir setzen nun

$$b' := b - \frac{b^2 - 2}{2b}\,.$$

Wegen $1 \in M$ und $0 < 1 \leq b$ gilt dann $b' < b$, und aus $b^2 > 0 > -2$ können wir wegen

$$b^2 > -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2b^2 > b^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad b > \frac{b^2 - 2}{2b} \quad \Leftrightarrow \quad b - \frac{b^2 - 2}{2b} > 0$$

auf $b' > 0$ schließen. Ferner haben wir

$$(b')^2 = \left(b - \frac{b^2 - 2}{2b}\right)^2 = b^2 - 2b \cdot \frac{b^2 - 2}{2b} + \left(\frac{b^2 - 2}{2b}\right)^2 = 2 + \left(\frac{b^2 - 2}{2b}\right)^2 > 2$$

und damit folgt $x^2 < (b')^2$ für alle $x \in M$. Dies impliziert $x < b'$, denn $x \geq b'$ würde wegen $b' > 0$ die Ungleichung $x^2 \geq (b')^2$ erzwingen. Mit anderen ist b' eine obere Schranke von M mit $b' < b$, und damit kann b kein Supremum von M sein.

Aufgrund der obigen Beobachtung liegt es nun nahe, die Lücken durch die Existenz von Suprema zu erzwingen. Dies ist die Motivation für das folgende, letzte Axiom für $\mathbb{R}$.

Supremumsaxiom. Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Mit dem Supremumsaxiom finden wir in $\mathbb{R}$ nun tatsächlich ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b^2 = 2$. Sei dazu $b := \sup M$, wobei M die Menge aus Lemma 2.4.3 ist. In dem Beweis von Lemma 2.4.3 haben wir dann zunächst $b^2 \geq 2$ gesehen. Ferner führte $b^2 > 2$ durch die Konstruktion eines b' zu einem Widerspruch und damit gilt in der Tat $b^2 = 2$.

Die axiomatische Einführung von $\mathbb{R}$ erfordert natürlich einen Existenzbeweis, den wir aber hier nicht durchführen wollen. Das Gleiche gilt für die “Eindeutigkeit”, vgl. dazu auch Abschnitt 53. Schließlich kann man auch zeigen, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt und dass $\mathbb{R}$ keine Lücken mehr besitzt, so dass unser anfängliches Problem tatsächlich gelöst ist.

Der folgende Satz zeigt, dass das Archimedische Axiom in $\mathbb{R}$ erfüllt ist.

Theorem 2.4.4

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.

Beweis.

Ist $y \leq x$, so können wir $k = 2$ wählen. Es reicht daher den Fall $x < y$ zu betrachten.
Wir nehmen nun an, dass es $0 < x < y$ gibt, so dass $nx \leq y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Menge

$$M := \{nx : n \in \mathbb{N}\}$$

ist dann beschränkt und daher existiert $b := \sup M$. Da b eine obere Schranke von M ist, folgt $nx \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $(n+1)x \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies impliziert $nx \leq b - x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $b' := b - x$ ist eine obere Schranke von M. Wegen $x > 0$ gilt aber $b' = b - x < b$, was $b = \sup M$ widerspricht. $\square$

Im folgenden Schreiben wir $\sup \emptyset := -\infty$. Ist ferner $M \subset \mathbb{R}$ nicht beschränkt, so definieren wir $\sup M := \infty$. Damit hat jede Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ein Supremum.

Für $M \subset \mathbb{R}$ ist ferner das **Infimum** von M durch

$$\inf M := -\sup(-M) \tag{2.4.1}$$

definiert. Hierbei ist $-M := \{-x : x \in M\}$ und $-(-\infty) := \infty$. Analog sagen wir, dass M nach **unten beschränkt** ist, falls $-M$ nach oben beschränkt ist und in diesem Fall ist $-b$ eine **untere Schranke** von M, falls b eine obere Schranke von $-M$ ist. Insbesondere ist dann $\inf M$ die **größte untere Schranke** von M.

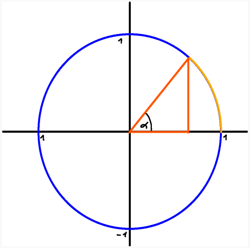
Gilt $\sup M \in M$, so schreiben wir $\max M := \sup M$ und im Fall $\inf M \in M$ schreiben wir analog $\min M := \inf M$.

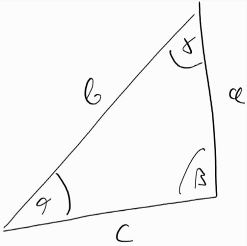
Für die Menge $M := \{1 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt beispielsweise $\inf M = 1$ und $\inf M \notin M$.

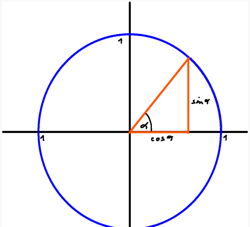
In der Tat ist 1 eine untere Schranke von M und gäbe es eine untere Schranke $b > 1$ von M, so würden wir mit Satz 2.4.4 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - 1$ finden. Dies ergäbe $1 + 1/n < b$, d.h. b kann keine untere Schranke sein. Insgesamt haben wir also $\inf M = 1$ gesehen und $1 \notin M$ folgt aus den Körperaxiomen.

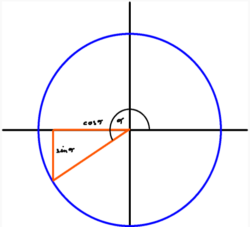
Section 2.5
Winkelfunktionen

Winkel messen wir im folgenden im **Bogenmaß**. Die Größe eines Winkels α entspricht damit der Länge des Kreisbogenabschnitts zum Radius 1, der vom Winkel α bestimmt wird. Ein rechter Winkel entspricht damit $\pi/2$, ein Vollkreis 2π, siehe Abbildung 5.









Betrachten wir ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Winkeln, α, $\beta := \pi/2$ und γ, die aufsteigend gegen den Uhrzeigersinn beschriftet sind, und benennen wir die jeweils gegenüberliegenden Seiten mit a, b und c, siehe wieder Abbildung 5, so gilt

$$\cos\alpha := \frac{c}{b} \qquad \text{und} \qquad \sin\alpha := \frac{a}{b}\,.$$

Für $c = 1$ vereinfachen sich die Formeln auf natürliche Weise und eine geometrische Interpretation am Einheitskreis ist möglich, siehe Abbildung 5. Diese erlaubt es auch, $\alpha > \pi/2$ zu betrachten, siehe wieder Abbildung 5.

Einige spezielle Werte der Winkelfunktionen lassen sich direkt aus speziell gewählten Dreiecken ablesen, siehe Abbildung 6.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

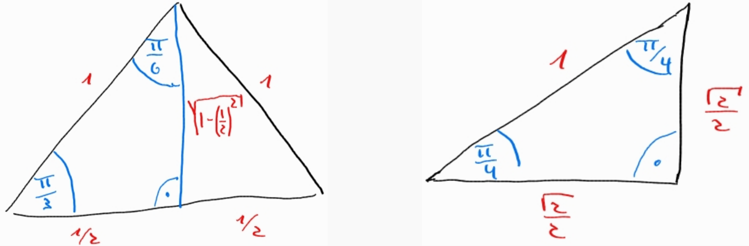


Abbildung: Links: Geometrische Herleitung von $\sin\frac{\pi}{6}$ an einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1. **Rechts:** Geometrische Herleitung von $\sin\frac{\pi}{4}$ an einem gleichschenkeligem Dreieck mit rechten Winkel. In beiden Fällen wird der Satz von Pythagoras angewendet.

Mit der geometrischen Interpretation am Einheitskreis und dem Satz des Pythagoras ergibt sich sofort das folgende Lemma.

Lemma 2.5.1

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1\,,$$

wobei wir die Kurzzschreibweisen $\sin^2 \alpha := (\sin \alpha)^2$ *und* $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$ *verwenden.*

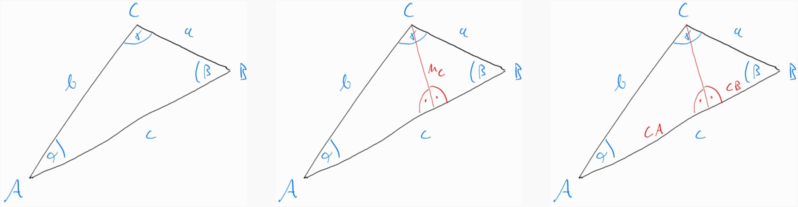


Abbildung: Links: Ein allgemeines Dreieck mit Seiten-, Ecken- und Winkelbezeichnungen **Mitte:** Geometrischer Ansatz für den Sinussatz. **Rechts:** Geometrischer Ansatz für den Kosinussatz.

In den folgenden beiden Sätzen betrachten wir allgemeine Dreiecke, wobei die Seiten-, Ecken- und Winkelbezeichnungen der Abbildung 7 zu entnehmen sind.

Theorem 2.5.2
In jedem Dreieck gilt

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\,.$$

Beweis.
Die Höhe h_c zur Grundseite c, siehe Abbildung 7, berechnet sich sowohl durch $h_c = b\sin\alpha$ als auch durch $h_c = a\sin\beta$. Gleichsetzen und Umstellen liefert die erste Gleichheit. Die zweite folgt durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen. $\square$

Theorem 2.5.3
In jedem Dreieck gilt

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Beweis.
Seien c_A und c_B für die beiden Abschnitte der Seite c, die durch h_c entstehen, siehe Abbildung 7. Damit haben wir $c_A + c_B = c$. Mit dem Satz des Pythagoras und $c_A = b\cos\alpha$ gilt dann

$$\begin{aligned} a^2 = h_c^2 + c_B^2 &= b^2\sin^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Die weiteren Identitäten folgen durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen. □

Das folgende Lemma fasst ein paar einfache Formeln für die Sinus- und Kosinus-Funktion zusammen.

Lemma 2.5.4

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha & \quad \textit{und} \quad && \cos(-\alpha) &= \cos\alpha\,, \\
\sin(\alpha+\pi/2) &= \cos\alpha & \quad \textit{und} \quad && \cos(\alpha+\pi/2) &= -\sin\alpha\,, \\
\sin(\alpha+\pi) &= -\sin\alpha & \quad \textit{und} \quad && \cos(\alpha+\pi) &= -\cos\alpha\,, \\
\sin(\alpha+2\pi) &= \sin\alpha & \quad \textit{und} \quad && \cos(\alpha+2\pi) &= \cos\alpha\,.
\end{aligned}
$$

BEWEIS

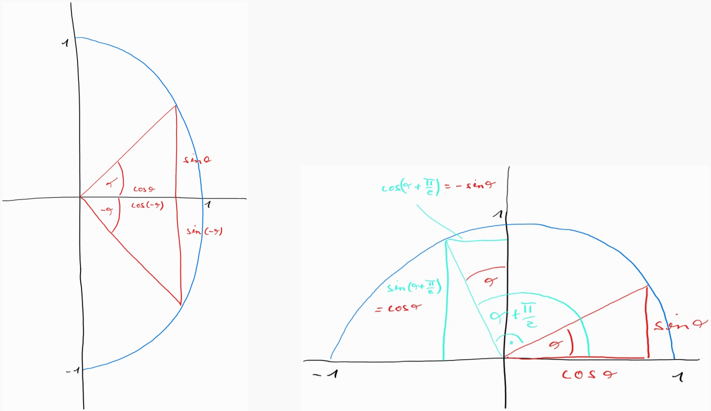


Abbildung: Links: Dreiecke mit Winkel α und α am Einheitskreis. **Rechts:** Drehen des Dreiecks mit Winkel α um $\pi/2$.

Die ersten beiden Zeilen lassen sich leicht am Einheitskreis ablesen, siehe abbildung 8. Die dritte und vierte Zeilen folgen aus der zweiten Zeile durch 2- bzw. viermaliges Anwenden.

Theorem 2.5.5

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$

BEWEIS

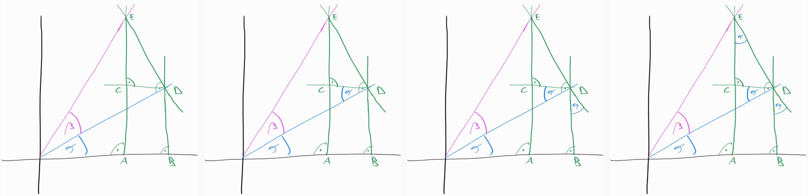


Abbildung: Links: Die Winkel α und β zusammen mit den senkrechten Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$, sowie der waagerechten Strecke $\overline{CD}$. Nachdem die Strahlen in Blau und Magenta gezeichnet sind, wird ein Punkt E fixiert. Dann werden zunächst die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ konstruiert. Im Anschluss werden noch die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{BD}$ konstruiert. **Mitte-Links:** Identifikation des Winkels α zwischen den Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{0D}$. **Mitte-Rechts:** Identifikation des Winkels α zwischen den Strecken $\overline{BD}$ und der Verlängerung von $\overline{DE}$ nach unten. **Rechts:** Identifikation des Winkels α zwischen den Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$.

BEWEIS

Wir betrachten die Abbildung 9 und bezeichnen die Länge einer Strecke $\overline{XY}$ mit $|\overline{XY}|$. Mit $|\overline{AE}| = |\overline{AC}| + |\overline{CE}|$ und $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ folgt dann:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{0E}|} &= \frac{|\overline{BD}| + |\overline{CE}|}{|\overline{0E}|} \\ &= \frac{|\overline{BD}| \cdot |\overline{0D}|}{|\overline{0D}| \cdot |\overline{0E}|} + \frac{|\overline{CE}| \cdot |\overline{ED}|}{|\overline{ED}| \cdot |\overline{0E}|} \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \beta\end{aligned}$$

Die restlichen Formeln können analog bewiesen werden.

Section 2.6
Komplexe Zahlen

REELLE ZAHLEN KÖNNEN NICHT ALLES AUSDRÜCKEN

Obwohl wir durch die Hinzunahme von Suprema die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erheblich erweitert haben, können gewisse Gleichungen in den resultierenden reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht gelöst werden. Beispielsweise hat die Gleichung

$$x^2 = -1$$

in $\mathbb{R}$ keine Lösung, da wir einerseits $x^2 \geq 0$ und andererseits $-1 < 0$ haben. Da die beiden letzten Ungleichungen in jedem geordneten Körper gelten, besteht auch keine Hoffnung, einen noch größeren, geordneten Körper $\mathbb{F}$ zu finden, in dem $x^2 = -1$ eine Lösung hat. Wollen wir die Körperaxiome nicht aufgeben, so müssen wir daher zwangsläufig die Ordnungsaxiome aufgeben, um die Gleichung lösen zu können.

Nehmen wir nun an, dass wir einen Körper $\mathbb{F}$ haben, in dem es eine solche Lösung $\mathrm{i} \in \mathbb{F}$ gibt, d.h. $\mathrm{i}^2 = -1$. Wegen der Körperaxiome müssen dann für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{F}$ die beiden Gleichungen

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$$

und

$$\begin{aligned}(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) &= x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}y_1x_2 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

gelten. Zudem wollen wir natürlich $\mathbb{R}$ in $\mathbb{F}$ wiederfinden können, d.h. wir wollen $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$ haben. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ werden dieses erfüllen.

Die obigen Gleichungen motivieren dazu, Elemente in $\mathbb{F}$ als Zahlenpaare zu definieren. Die folgende Definition greift diesen Gedanken auf.

Definition 2.6.1

Die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ zusammen mit der Addition $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die für alle $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ und $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)
\end{aligned}
$$

definiert sind, heißt Menge der komplexe Zahlen.

Mit fleißigem Rechnen stellt sich heraus, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist, wobei seine Null durch $(0, 0)$ und seine Eins durch $(1, 0)$ gegeben sind. Für $(x, y) \in \mathbb{C}$ gilt ferner $-(x, y) = (-x, -y)$ und

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

wobei letzteres natürlich nur im Fall $(x, y) \neq (0, 0)$ definiert ist. Ferner gilt $(0, 1) \cdot (0, 1) = -(1, 0)$, d.h. die imaginäre Einheit $\mathrm{i} := (0, 1)$ löst tatsächlich die Gleichung $z^2 = -1$. Schließlich liefert die obige Formel $\mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$.

Werden die Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf $\mathbf{R} := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ eingeschränkt, so erhalten wir wieder einen Körper, der zudem eine Totalordnung

$$(x_1, 0) \leq (x_2, 0) \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1 \leq x_2$$

hat, mit der er zu einem geordneten Körper wird. Ferner erfüllt diese Totalordnung das Supremumsaxiom, und damit können wir die Menge $\mathbf{R}$ als ein weiteres Modell von $\mathbb{R}$ betrachten. Mit dieser Identifizierung haben wir also $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und

$$x + \mathrm{i}y := (x, y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

ergibt eine verträgliche Notation.

Nach unserer Konstruktion kann $\mathbb{C}$ als **Zahlenebene** gedacht werden, deren x-Achse die reellen Zahlen bildet. Diese Achse heißt aus diesem Grund häufig auch **reelle Achse**. Senkrecht dazu steht die y-Achse $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ die auch als **imaginäre Achse** bezeichnet wird.

Die Addition in $\mathbb{C}$ entspricht offensichtlich der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$ und eine geometrische Interpretation der Multiplikation werden nach den folgenden Definitionen kennenlernen.

Für $z := (x, y) \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Koordinaten

$$\operatorname{Re} z := x, \qquad \operatorname{Im} z := y$$

als **Real- und Imaginärteil** der Zahl z. Die Zerlegung $z = x + \mathrm{i}y$ wird als **kartesische Darstellung** der Zahl z bezeichnet. Der **Betrag**

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

entspricht dem Abstand von z zum Ursprung.

Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ sei nun $r := |z|$ und φ der Winkel zwischen der x-Achse und der Strecke $\overline{0z}$. Dann gilt die Polar-Darstellung von z:

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,.$$

Haben wir nun zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 in Polar-Darstellung (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2), so gilt

$$\begin{aligned}
&z_1 \cdot z_2 \\
&\quad = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\
&\quad = r_1 \cdot r_2\Big((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + \mathrm{i}(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)\Big) \\
&\quad = r_1 \cdot r_2\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big)\,, \qquad (2.6.1)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Additionstheoreme aus Satz 2.5.5 benutzt haben. Mit anderen Worten: Die Beträge werden multipliziert und die Winkel werden addiert.

Mit Hilfe der Formel (2.6.1) und Induktion über $n \in \mathbb{N}$ lässt sich nun der folgende Satz, der als **Formel von Moivre** bekannt ist, leicht beweisen.

Theorem 2.6.2
Sei $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \in \mathbb{C}$. *Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = r^n \cdot \left(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\right).$$

Im folgenden definieren wir für $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,.$$

Für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten dann die Formeln:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0} = 1\,, \tag{2.6.2}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}\,, \tag{2.6.3}$$

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\,, \tag{2.6.4}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{-1}. \tag{2.6.5}$$

Hierbei ist die erste Formel leicht abzulesen und die zweite folgt aus (2.6.1). Die dritte Formel folgt sofort aus der Formel von Moivre und die vierte Formel ist eine einfache Konsequenz aus den ersten beiden Formeln.

Theorem 2.6.3
*Es gibt genau n komplexe Zahlen z, die die Gleichung $z^n = 1$ erfüllen. Diese Zahlen sind die sogenannten **n-ten Einheitswurzeln***

$$z_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \frac{2\pi k}{n}}, \qquad\qquad k = 0, \ldots, n-1\,.$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, beachten wir, dass die Zahlen

$$0, \frac{2\pi \cdot 1}{n}, \frac{2\pi 2}{n}, \ldots, \frac{2\pi(n-1)}{n}$$

einen ganzen Einheitskreisumfang 2π in n gleich großen Schritte zerlegen. Entsprechend zerteilen die Einheitswurzeln $z_0, \ldots, z_{n-1}$ den Einheitskreis auf der Gauß'schen Zahlenebene und insbesondere gilt $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$.

Aus der eben bewiesenen Formel $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$ folgt sofort

$$z_k^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi k} = \cos(2\pi k) + \mathrm{i}\sin(2\pi k) = 1\,.$$

Wir müssen daher nur noch zeigen, dass es keine anderen Lösungen der Gleichung gibt. Einen einfachen Beweis werden wir mit Korollar 2.7.6 finden können. Hier werden wir einen etwas geometrischer orientierten Beweis vorstellen.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$. Wegen der Formel von Moivre wissen wir dann, dass

$$1 = z^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$$

und $|z| = 1$ gilt. Aufgrund der Form der Sinus- oder Kosinus-Funktion ergibt dies $n\varphi = 2\pi m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$, d.h. wir haben $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi m}{n}}$. Durch Division mit Rest gibt es dann $l \in \mathbb{Z}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit $ln + k = m$. Da dies

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi(ln+k)}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2\pi l}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi k}{n}} = 1\cdot z_k$$

ergibt, ist der Beweis dann beendet.

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist es sinnvoll die dazu **komplex konjugierte Zahl**

$$\bar{z} := x - \mathrm{i}y$$

zu betrachten. Es gilt

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \overline{w} \quad \text{und} \quad \overline{zw} = \bar{z}\,\overline{w}.$$

In der Tat ist die Formel für die Addition sofort ersichtlich. Wir rechnen also noch die Produktformel nach. Seien dazu $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$. Dann folgt einerseits

$$\overline{zw} = \overline{(x + \mathrm{i}y)(u + \mathrm{i}v)} = \overline{xu - yv + \mathrm{i}(xv + yu)} = xu - yv - \mathrm{i}(xv + uy)$$

und andererseits

$$\bar{z}\,\overline{w} = \overline{x + \mathrm{i}y}\,\overline{u + \mathrm{i}v} = (x - \mathrm{i}y)(u - \mathrm{i}v) = xu - yv - \mathrm{i}(xv + yu).$$

Mit Hilfe der komplex konjugierten Zahl kann der Betrag berechnet werden, denn mit der dritten binomischen Formel und $\mathrm{i}^2 = -1$ gilt

$$z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2 .$$

Damit können einfache Formeln nachgerechnet werden. So gilt

$$|zw| = |z|\,|w|$$

da

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Beträge sind also multiplikativ und wegen $|1| = 1$ gilt insbesondere $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Im folgenden gehen wir davon aus, dass die Exponentialfunktion $x \mapsto \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{R}$ bekannt ist. Insbesondere nehmen wir an, dass wir die Gleichung

$$\mathrm{e}^{x_1+x_2} = \mathrm{e}^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2}\,, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \tag{2.6.6}$$

kennen. Wir erweitern die Definition nun auf komplexe Zahlen $z := x + \mathrm{i}y$ durch

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} := \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \big(\cos y + \mathrm{i} \sin y \big)\,.$$

Mit anderen Worten gilt

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z} \big(\cos(\mathrm{Im}\, z) + \mathrm{i} \sin(\mathrm{Im}\, z) \big)\,.$$

Seien nun $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ zwei komplexe Zahlen. Mit der Definition der Exponentialfunktion im Komplexen, der Gleichung (2.6.6) im Reellen und (2.6.3) erhalten wir dann

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{x+u+\mathrm{i}(y+v)} = \mathrm{e}^{x+u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+v)} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{w}. \tag{2.6.7}$$

Mit anderen Worten gilt (2.6.6) nicht nur in $\mathbb{R}$ sondern auch in $\mathbb{C}$. Ebenso gilt nach Definition

$$|\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}$$

und aus (2.6.7) folgt

$$\mathrm{e}^{0} = 1, \qquad \text{sowie} \qquad \mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{z}}.$$

Wir können die gerade definierte Exponentialfunktion nutzen, um damit die Winkelfunktionen auszudrücken. Wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} &= \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi, \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} &= \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi \end{aligned}$$

ergeben sich $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)$ und $\sin\varphi = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Dies motiviert die folgenden Definitionen für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \\ \sin z &:= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right). \end{aligned}$$

Auch im Komplexen gilt dann

$$\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

und

$$\cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen, wir zeigen die Aussage für den Sinus. Es gilt

$$\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})^2 = 1\,.$$

Damit ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ gleich einer der beiden zweiten Einheitswurzeln, d.h. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \pm 1$. Wegen der Form dieser Einheitswurzeln, siehe Satz 2.6.3, schließen wir auf $z \in \mathbb{R}$ und somit folgt die Äquivalenz aus der entsprechenden Äquivalenz für die reelle Sinus-Funktion.

Wir definieren neben Sinus und Kosinus noch die beiden Funktionen **Tangens**

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

und **Kotangens**

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Analog zu den Winkelfunktionen definiert man die Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}
\cosh z &:= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}\right) , \\
\sinh z &:= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right) , \\
\tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}} , \\
\coth z &:= \frac{1}{\tanh z} = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}} .
\end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt somit $\cosh z = \cos(\mathrm{i}z)$ und $\sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$. Betrachtet man aber nur die reellen Winkel- und Hyperbelfunktionen, so gibt es keine analogen Gleichungen.

Hyperbelfunktionen können geometrisch interpretiert werden, wenn man statt des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ die Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ betrachtet.

Es gilt dann das folgende Lemma, das im Falle der Winkelfunktionen das Lemma 2.5.1 verallgemeinert.

Lemma 2.6.4

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 = \cosh^2 z - \sinh^2 z.$$

Beweis.

Im Falle der Hyperbelfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= \left(\frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{2z} + 2\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{e}^{-2z}) - (\mathrm{e}^{2z} - 2\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{e}^{-2z})}{4} \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Der Beweis für die Winkelfunktionen ist analog. □

Section 2.7
Polynome

Eine Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **Polynom**, falls es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und **Koeffizienten** $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{2.7.1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Für Polynome $p \neq 0$ setzen wir

$$\deg p := \min\left\{ n \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, \exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\, \forall z \in \mathbb{C} : p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right\}$$

und für das Polynom $p = 0$ schreiben wir $\deg p := -1$. In beiden Fällen heißt $\deg p$ der **Grad** des Polynoms p.

Ferner sprechen wir von einem **reellen Polynom**, falls wir reelle Koeffizienten finden, d.h. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Sind p und q zwei Polynome mit $\deg p \geq 0$ und $\deg q \geq 0$, so gilt

$$\deg(p+g) \leq \max\{\deg p, \deg q\}\,, \tag{2.7.2}$$

$$\deg(pq) \leq \deg p + \deg q\,, \tag{2.7.3}$$

wobei beide Formeln durch leichtes Ausrechnen gezeigt werden können.

Später werden wir sehen, dass man mit Hilfe von Ableitungen leicht sehen kann, dass die Koeffizienten eines Polynoms eindeutig sind. Dies wiederum führt dazu, dass die Ungleichung (2.7.3) eine Gleichung ist. Im folgenden werden wir aber die Eindeutigkeit der Koeffizienten nicht benötigen.

Ein $z \in \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von p, falls $p(z) = 0$ gilt. Für Nullstellen reeller Polynome gilt die folgende Beobachtung:

Lemma 2.7.1
Ist p ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, so ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

Beweis.
Es gilt

$$p(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \bar{z}^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0\,,$$

wobei wir im zweiten Schritt $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ausgenutzt haben. □

Polynome vom Grad 2 erlauben die Berechnung mit der aus der Schule bekannten “Mitternachts-Formel”, wobei es leicht zu ersehen ist, dass diese auch im Komplexen gilt. Für Polynome vom Grad 3 und 4 gibt es ebenfalls noch Formeln, die aber in der Regel unbrauchbar sind. Ferner kann man zeigen, dass es solche Formeln für allgemeine Polynome vom Grad ≥ 5 nicht geben kann.

Unabhängig davon gilt aber der auf Gauß zurückgehende **Fundamentalsatz der Algebra**, den wir an dieser Stelle weder beweisen wollen noch können.

Theorem 2.7.2

Jedes Polynom p mit $\deg p \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Ähnlich wie für ganze Zahlen können wir Polynome mit Rest teilen. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Theorem 2.7.3

Seien p und q Polynome mit $\deg p \geq \deg q \geq 0$. Dann gibt es Polynome r und s mit

$$p(z) = s(z)q(z) + r(z)\,, \qquad\qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

sowie $\deg s = \deg p - \deg q$ und $\deg r < \deg q$.

Seien $n := \operatorname{deg} p$ und $m := \operatorname{deg} q$. Ferner seien $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ entsprechende Koeffizienten von p und q. Dann ist

$$p_1(z) := p(z) - \frac{a_n}{b_m} z^{n-m} q(z) , \qquad z \in \mathbb{C}$$

ein Polynom mit $\operatorname{deg} p_1 \leq n - 1$. Wir definieren das Polynom s_1 durch $s_1(z) := \frac{a_n}{b_m} z^{n-m}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so dass dann $p_1 = p - s_1 q$ und $\operatorname{deg} s_1 \leq n - m$ gilt.

Ist $\operatorname{deg} p_1 \geq q$, so wenden wir die obige Konstruktion auf p_1 und q an, so dass wir Polynome p_2 und s_2 mit $p_2 = p_1 - s_2 q$, sowie $\operatorname{deg} s_2 \leq \operatorname{deg} p_1 - m \leq n - m$ und $\operatorname{deg} p_2 \leq \operatorname{deg}(p_1) - 1 \leq n - 2$ gefunden haben.

Dieses Vorgehen wiederholen wir nun solange, bis die gefundenen Polynome p_k und s_k, die $p_k = p_{k-1} - s_k q$ und $\operatorname{deg} s_k \leq n - m$ nach Konstruktion erfüllen, auch $\operatorname{deg} p_k < \operatorname{deg} q$ erfüllen. Da wir $\operatorname{deg} p_i < n - i$ im i-ten Schritt haben, ist dies nach maximal $n - m$ Schritten der Fall. Wir setzen nun $r := p_k$ und $s := s_1 + \cdots + s_k$.

Für $p_0 := p$ liefert unsere Konstruktion dann

$$\begin{aligned} r = p_k &= p_{k-1} - s_k q \\ &= p_{k-2} - s_{k-1} q - s_k q \\ &= \dots \\ &= p_0 - s_1 q - \dots - s_{k-1} q - s_k q \\ &= p - (s_1 + \cdots s_k) q \\ &= p - sq \end{aligned}$$

und $\deg r < \deg q$.

Schließlich folgt $\deg s \leq n - m$ aus (2.7.2) in Verbindung mit $\deg s_i \leq n - m$ für alle $1, \ldots, k$. Umgekehrt wissen wir wegen $p = sq + r$ und (2.7.2) auch

$$\begin{aligned}\deg p \leq \max\{\deg(sq), \deg r\} &\leq \max\{\deg(sq), \deg(q) - 1\}\\ &\leq \max\{\deg(sq), \deg(p) - 1\}\,.\end{aligned}$$

Wäre nun $\deg(p) - 1 \geq \deg(sq)$, so hätten wir $\deg p \leq \deg(p) - 1$, was unmöglich ist. Aus diesem Grund gilt $\deg(p) - 1 < \deg(sq)$. Dies führt zu

$$\deg p \leq \max\{\deg(sq), \deg(p) - 1\} = \deg(sq) \leq \deg s + \deg q\,,$$

wobei wir im letzten Schritt (2.7.3) ausgenutzt haben. Dies ergibt $\deg s \geq \deg p - \deg q$.

Der Beweis des Satzes 2.7.3 liefert eine explizite Konstruktion für s und r. Wir betrachten dies am Beispiel der Polynome $p(z) := 2z^3 - 3z^2 - 6z + 6$ und $q(z) := z - 2$. Wir gehen dann wie bei der schriftlichen Division vor:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 2z^3 - 3z^2 - 6z + 6 \big) \div \big(z - 2 \big) = 2z^2 + z - 4 + \dfrac{-2}{z-2} \\
\underline{\;\; - 2z^3 + 4z^2 \;\;} \\
\qquad\qquad\quad z^2 - 6z \\
\qquad\qquad \underline{- z^2 + 2z} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 4z + 6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\;\;\; 4z - 8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2
\end{array}
$$

Hierbei sind

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 2z^2 & \qquad p_1 &= z^2 - 6z + 6 \\
s_2 &= z & p_2 &= -4z + 6 \\
s_3 &= 4 & p_3 &= -2\,,
\end{aligned}
$$

und damit erhalten wir $s = 2z^2 + z + 4$ und $r = -2$.

Mit Hilfe der Polynomdivision und dem Fundamentalsatz der Algebra können wir Polynome durch ihre Nullstellen darstellen. Um dies zu zeigen, benötigen wir zunächst das folgende Korollar.

Korollar 2.7.4

Sei p ein Polynom mit $\deg p \geq 1$ und λ eine Nullstelle von p. Dann gibt es ein Polynom s mit $\deg s = \deg(p) - 1$ und

$$p(z) = (z - \lambda) \cdot s(z)\,, \qquad\qquad z \in \mathbb{C}.$$

*In diesem Fall heißt das Polynom $(z - \lambda)$ vom Grad 1 **Linearfaktor** von p.*

Wir betrachten das Polynom $q(z) := z - \lambda$. Dies ist eine nicht-konstante, lineare Funktion und deswegen haben wir $\deg q = 1$. Nach Satz 2.7.3 gibt es nun Polynome s und r mit $p = s \cdot q + r$ für alle $z \in \mathbb{C}$, sowie $\deg s = \deg p - \deg q = \deg(p) - 1$ und $\deg r < \deg q = 1$. Damit gibt es ein $a_0 \in \mathbb{C}$ mit $r(z) = a_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$0 = p(\lambda) = s(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda) + r(\lambda) = r(\lambda) = a_0$$

und damit $r = 0$.

Wir können nun den sogenannten **Hauptsatz der Algebra**, der ein Polynom anhand seiner Nullstellen beschreibt, beweisen.

Theorem 2.7.5

Sei p ein Polynom mit $\deg p = n$ für ein $n \geq 1$. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = a \cdot (z - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (z - \lambda_n)\,, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.7.4}$$

Ferner sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die einzigen Nullstellen von p.

Kommt der Faktor $(z - \lambda_i)$ genau k-mal in der Zerlegung (2.7.4) vor, so sprechen wir von einer **k-fachen Nullstelle** von p. Beispielsweise ist $\lambda = 1$ eine zweifache Nullstelle des reellen Polynoms $p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$.

Zum Beweis von (2.7.4) benutzen wir Induktion über n.

Für $n = 1$ haben wir dabei $p(z) = a_1 z + a_0$ mit $a_1 \neq 0$, so dass $\lambda_1 := -a_0/a_1$ und $a := a_1$ die gewünschte Darstellung liefert.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Aussage für alle Polynome q mit $\deg q = n$ wahr ist. Sein nun p ein Polynom mit $\deg p = n + 1$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, siehe Satz 2.7.2, gibt es dann eine Nullstelle $\lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ von p. Korollar 2.7.4 gibt uns dann ein Polynom q mit $\deg q = n$ und $p(z) = (z - \lambda_{n+1})q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Anwenden der Induktionsvoraussetzung ergibt dann die Behauptung für p.

Aus (2.7.4) lässt sich sofort ablesen, dass $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Nullstellen von p sind. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ eine beliebige Nullstelle. Dann folgt

$$0 = p(\lambda) = a \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_n)\,.$$

Da $\mathbb{C}$ ein Körper ist, muss einer der Faktoren gleich 0 sein, d.h. es gibt ein i mit $\lambda - \lambda_i = 0$. Dies zeig $\lambda = \lambda_i$, d.h. es gibt keine weitere Nullstelle als die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Mit Hilfe des Hauptsatzes der Algebra können wir nun einen Test auf Gleichheit für Polynome formulieren.

Korollar 2.7.6

Seien p und q Polynom mit $\deg p \leq n$ *und* $\deg q \leq n$ *für ein* $n \in \mathbb{N}_0$. *Falls es* $n+1$ *verschiedene Punkte* $z_1, \ldots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$ *gibt mit* $p(z_i) = q(z_i)$ *für alle* $i = 1, \ldots, n+1$, *so gilt* $p = q$, *d.h.*

$$p(z) = q(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Betrachten wir insbesondere $q = 0$ in dem obigen Korollar, so sehen wir, dass die Existenz von $n+1$ verschiedenen Nullstellen von p schon $p = 0$ impliziert. Tatsächlich betrachtet der folgende Beweis des Korollars genau diesen Fall.

BEWEIS

Wir setzen $r := p - q$. Nach (2.7.2) ist dann r ein Polynom mit $k := \deg r \leq n$. Ferner sind nach Konstruktion die Zahlen $z_1, \ldots, z_{n+1}$ Nullstellen von r.

Wäre nun $r \neq 0$, so hätte im Fall $k \geq 1$ das Polynom r nach dem Hauptsatz der Algebra genau k Nullstellen. Wegen $k \leq n < n + 1$ führt dies zum Widerspruch.

Im Fall $k = 0$ ist r von der Form $r = a_0$ mit $a_0 \neq 0$ und damit hätte es gar keine Nullstelle, was ebenfalls zum Widerspruch führt.

Für reelle Polynome p hatten wir in Lemma 2.7.1 gesehen, dass mit λ auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle ist. Da $\lambda = \overline{\lambda}$ äquivalent zu $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, treten genau zwei Fälle für Nullstellen reeller Polynome auf:

i). Die Nullstelle λ ist reell mit zugehörigem Linearfaktor $z - \lambda$.

ii). Es ist $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ mit $\beta \neq 0$ eine Nullstelle. Dann ist aber ebenso $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ Nullstelle und die beiden Linearfaktoren ergeben zusammen den quadratischen Faktor

$$\begin{aligned}(z - \alpha - \mathrm{i}\beta)(z - \alpha + \mathrm{i}\beta) &= (z - \alpha)^2 + \beta^2 \\ &= z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2 \,.\end{aligned}$$

Damit zerfällt jedes reelle Polynom in ein Produkt aus Linearfaktoren und quadratischen Faktoren.

BEISPIEL

Das Polynom $p(z) := z^3 + 2z - 3$ besitzt beispielsweise die Nullstelle $\lambda_1 := 1$, wie direkt durch Einsetzen ersichtlich ist. Spaltet man diesen Linearfaktor mittels Polynomdivision ab, so gilt

$$z^3 + 2z - 3 = (z^2 + z + 3)(z - 1)$$

und der entstehende quadratische Faktor $(z^2 + z + 3)$ besitzt keine weiteren reellen Nullstellen. Allerdings besitzt er zwei zu einander komplex konjugierte Nullstellen

$$\lambda_{2,3} := -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Im folgenden betrachten wir ein sogenanntes **Interpolationsproblem**, bei dem zu gegebenen **Eingabepunkten** $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und **Ausgabepunkten** $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gesucht ist, die

$$f(x_i) = y_i\,, \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

erfüllt. Da es naturgemäß sehr viele solche Funktionen gibt, werden typischerweise zusätzliche Forderungen an die gesuchte Funktion f gestellt.

Eine mögliche Anwendung für dieses Problem besteht darin, dass wir eine komplizierte oder aufwendig zu berechnende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben und diese durch eine "billige" Alternative f ersetzen wollen. Die Hoffnung besteht dann darin, dass aus

$$f(x_i) = y_i := g(x_i)\,, \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

schon $f(x) \approx g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die uns interessieren, folgt.

Wir wollen im folgenden ein interpolierendes Polynom p mit $\deg p \leq n-1$ konstruieren. Der folgende Satz zeigt, dass dies auf genau eine Art möglich ist.

Theorem 2.7.7
Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein Polynom p mit $\deg p \leq n-1$ und

$$p(x_i) = y_i\,, \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$$

ILLUSTRATION

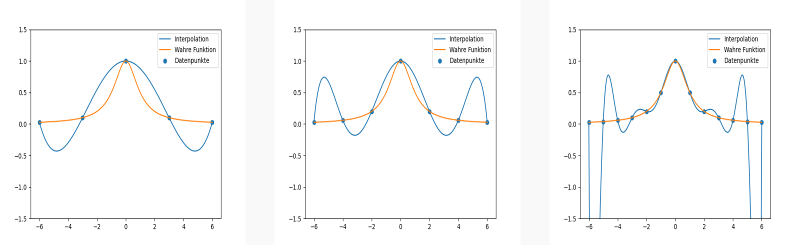


Abbildung: Interpolation des Funktion $g(x) := (1 + x^2)^{-1}$ durch Polynome aus Satz 2.7.7. **Links:** 5 Eingabepunkte mit Abstand 3. **Mitte:** 7 Eingabepunkte mit Abstand 2. **Rechts:** 13 Eingabepunkte mit Abstand 1. Insgesamt nähern sich die interpolierenden Polynome nur “in der Mitte” der Funktion f an.

Zunächst konstruieren wir ein Polynom mit den gesuchten Eigenschaften. Für $k = 1, \dots, n$ definieren wir dazu die Lagrange-Polynome

$$L_k(x) := \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Für $i = 1, \dots, n$ gilt dann

$$L_k(x_i) = \delta_{i,k} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

da im ersten Fall alle Brüche des Lagrange-Polynom L_k gleich 1 sind und im zweiten Fall ein Bruch gleich 0 ist. Ferner ist L_k offensichtlich ein Polynom mit $\deg L_k \leq n - 1$. Damit ist

$$p := \sum_{k=1}^{n} y_k L_k$$

das gesuchte Polynom.

Die Eindeutigkeit folgt direkt aus Korollar 2.7.6.

Der Beweis des Satzes 2.7.7 konstruiert das Polynom explizit. Ferner ist dieses Polynom einfach zu konstruieren und bei Änderung von den Ausgabepunkten y_i lässt es sich leicht anpassen. Ferner ist das Polynom eindeutig bestimmt und sehr “glatt”. Leider werden die Berechnungen teuer, wenn sich die Eingabepunkte x_i ändern sollten. Darüber hinaus können die interpolierenden Polynome “zappeln”, siehe Abbildung 10, was auch als Runges Phänomen bekannt ist.

CHAPTER 3: GEOMETRIE

Section 3.1
Operationen mit Vektoren

Im folgenden wollen wir einige geometrische Aspekte im zwei- und drei-dimensionalen Raum betrachten. Damit diese möglichst gleichzeitig behandelt werden können, betrachten wir zunächst den d-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^d$.

VEKTOREN

Im folgenden nennen wir ein $x \in \mathbb{R}^d$ **Vektor** und schreiben ihn als **Spaltenvektor**

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix},$$

wobei $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ die **Komponenten** von x sind. In der Literatur findet man auch die Schreibweisen $\vec{x}$ oder $\mathbf{x}$ für Vektoren, diese werden wir aber nicht verwenden.

In den Räumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sehen Vektoren damit so aus

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vektoren kann man als **Punkte** in dem d-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^d$ und als **Richtungspfleile** in dem Raum $\mathbb{R}^d$ interpretieren. Je nachdem in welchem Kontext man sich befindet, ist die eine oder die andere Interpretation hilfreicher.

Auf $\mathbb{R}^d$ können wir eine Vektor-Addition $+ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ durch

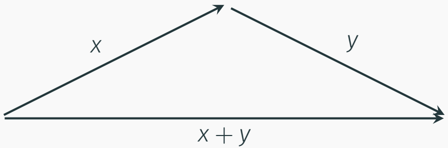
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_d + y_d \end{pmatrix}$$

definieren. Es ist leicht zu überprüfen, dass $(\mathbb{R}^d, +)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element

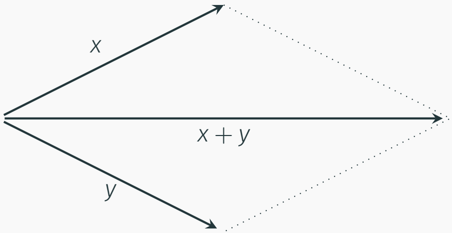
$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

ist. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ ist zudem $-x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_d \end{pmatrix}$ das inverse Element.

Die Vektoraddition kann man mit Verschiebungen vom Nullpunkt illustrieren:



Die Vektoraddition wird oft auch mit einem Parallelogramm illustriert:



Auf $\mathbb{R}^d$ können wir außerdem eine Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ durch

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_d \end{pmatrix}$$

definieren. Häufig wird dann aber der Punkt $\cdot$, wie bei der Multiplikation in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, weggelassen. Die Skalarmultiplikation entspricht einer Streckung des Vektors x um den Faktor α.

Der Raum $\mathbb{R}^d$ zusammen mit seiner Vektoraddition und Skalarmultiplikation bildet einen Vektorraum im Sinne der folgenden Definition, wie einfache Rechnungen zeigen.

Definition 3.1.1

Sei V eine Menge auf der Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ definiert sind. Dann heißt $(V, +, \cdot)$ **Vektorraum**, oder auch **$\mathbb{R}$-Vektorraum**, falls $(V, +)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 ist und für alle $x, y \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot x) &= (\alpha\beta) \cdot x\,, \\ \alpha \cdot (x + y) &= \alpha \cdot x + \alpha \cdot y\,, \\ (\alpha + \beta) \cdot x &= \alpha \cdot x + \beta \cdot x\,, \\ 1 \cdot x &= x\,. \end{aligned}$$

Haben wir stattdessen eine Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$ die die gleichen 4 Gleichungen für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ erfüllt, so sprechen wir von einem **$\mathbb{C}$-Vektorraum**.

Aus den 4 Eigenschaften der Skalarmultiplikation kann man z.B. auf $(-1) \cdot x = -x$ und $0 \cdot x = 0$ schließen. Im $\mathbb{R}^d$ kann man dies natürlich auch direkt nachweisen.

Zu einem Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ ist die Entfernung dieses Punktes zum Nullpunkt nach Pythagoras durch

$$\|x\|_2 := |x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$$

gegeben. Im folgenden nennen wir $|x|$ den **Betrag** von x. Der Betrag ist eine Norm im Sinne der folgenden Definition.

Definition 3.1.2

Sei $(V, +, \cdot)$ Vektorraum. Dann heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ **Norm** auf V, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

i). **Definitheit:** $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii). **(absolute) Homogenität:** $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

iii). **Dreiecksungleichung:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Vektorräume mit einer Norm heißen **normierte Räume**. Analog können Normen auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen definiert werden.

Die ersten beiden Eigenschaften sind dabei für den Betrag leicht nachzurechnen. Für den Betrag entspricht die Dreiecksungleichung der bekannten Tatsache, dass in einem Dreieck jede Seite kürzer als die Summe der beiden anderen Seiten ist. Einen formalen Beweis werden wir später kennenlernen.

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ mit $|x|$ heißt **normiert** oder auch **Einheitsvektor**. Ist $x \neq 0$ ein Vektor im $\mathbb{R}^d$, so ist $|x|^{-1}x$ normiert. Häufig schreiben wir auch $\frac{x}{|x|}$ statt $|x|^{-1}x$. Analoge Definitionen sind in allgemeinen normierten Räumen möglich.

Neben dem Betrag gibt es eine Vielzahl weitere Normen auf dem $\mathbb{R}^d$. Hier wollen wir nur die folgenden zwei Normen erwähnen.

Die **Supremumsnorm**:

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, d\}\,.$$

Die **1-norm**:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|\,.$$

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem Vektorraum V, so heißt

$$B_V := B_{\|\cdot\|} := \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$$

die **Einheitskugel** von $\|\cdot\|$. Im Falle von $V = \mathbb{R}^2$ ist die Einheitskugel bzgl. des Betrages der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Für die Supremumsnorm ist die Einheitskugel das Quadrat mit Mittelpunkt 0 und Seitenlänge 2.

Im folgenden heißt der Vektor $e_i \in \mathbb{R}^d$, der an der i-ten Stelle gleich 1 ist und ansonsten nur Nullen enthält, der **i-te Einheitsvektor** im $\mathbb{R}^d$. Im $\mathbb{R}^3$ sind also

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die drei Einheitsvektoren.

Für $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ gilt die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \,,$$

wie durch einfaches Nachrechnen überprüft werden kann.

Für $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ und $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ ist das **Skalarprodukt** durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

definiert. Damit haben wir eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= |x|^2 \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle \\ \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle \\ \langle x + z, y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ erfüllt. Diese Gleichungen lassen sich jeweils sehr einfach nachrechnen und werden daher übersprungen.

In der Literatur finden sich viele weitere Schreibweisen des Skalarprodukts, wie z.B.

$$x \cdot y := x \circ y := x \bullet y := \langle x, y \rangle .$$

GEOMETRISCHE INTERPRETATION DES SKALARPRODUKTS

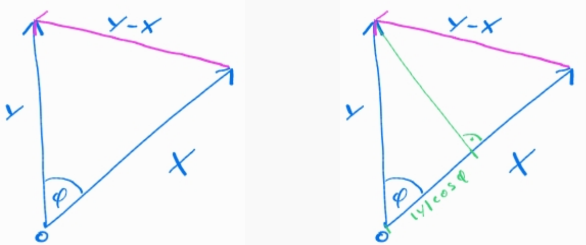


Abbildung: Links: Ansatz für die Anwendung des Kosinussatzes im Beweis von Satz 3.1.3. **Rechts:** Die Länge der Strecke zwischen 0 und der grünen Höhe des Dreiecks ist laut Satz 3.1.3 gleich $|y| \cos \varphi = \langle x, y \rangle \cdot |x|^{-1}$. Der entsprechende Vektor von 0 bis zum Fußpunkt der Höhe ist damit $\langle x, y \rangle \cdot \frac{x}{|x|}$. Dieser Vektor entspricht der Projektion des Vektors y auf die von x aufgespannte Gerade.

Der folgende Satz liefert eine geometrische Interpretation des Skalarprodukts, vgl. auch Abbildung 11.

Theorem 3.1.3

Im Fall $\varphi = 0$ gilt $y = x$ und im Fall $\varphi = \pi$ gilt $y = -x$. In beiden Fällen ist die Behauptung dann offensichtlich.

Für $\varphi \in (0, \pi)$ betrachten wir das Dreieck mit den Ecken 0, x und y. Da die Strecke $\overline{xy}$, die dem Winkel φ gegenüberliegt, durch $y - x$ gegeben ist, haben die Seiten des Dreiecks die Längen $|x|$, $|y|$ und $|y - x|$, siehe auch Abbildung 11. Mit dem Kosinussatz 2.5.3 folgt dann

$$|y - x|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos \varphi \, .$$

Ferner gilt

$$|y - x|^2 = \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle \, .$$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen ergibt

$$|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos \varphi \, ,$$

und einfaches Umformen liefert dann die Behauptung.

Da $|\cos\varphi| \leq 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt, folgt aus Satz 3.1.3 sofort die **Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung**

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \tag{3.1.1}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$. Diese kann auch rein rechnerisch, d.h. ohne den geometrischen Ansatz des Satz 3.1.3, nachgewiesen werden.

Ferner sind zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$ **senkrecht zueinander** oder **orthogonal**, geschrieben $x \perp y$, genau dann wenn $\langle x, y\rangle = 0$ gilt.

Wir sagen ferner, dass zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$ **parallel** sind, geschrieben $x||y$, falls es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $x = \alpha y$ oder $\alpha x = y$. Die beiden Fälle sind dabei notwendig, um die Fälle $x = 0$ und $y \neq 0$ bzw. $y = 0$ und $x \neq 0$ mit einzuschließen.

Sei $e_i \in \mathbb{R}^d$ der i-te Einheitsvektor. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ gilt dann

$$\langle x, e_i \rangle = x_i$$

und damit haben wir insgesamt

$$x = \sum_{i=1}^{d} \langle x, e_i \rangle e_i \, .$$

Ferner sind verschiedene Einheitsvektoren senkrecht zueinander.

Für $d = 3$ ist das **Kreuzprodukt** $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

definiert, wobei wir $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ betrachtet haben.

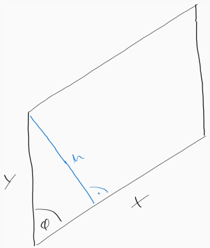
Das Kreuzprodukt erfüllt die Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
x \times x &= 0\,,\\
x \times y &= -(y \times x)\,,\\
(\alpha x) \times y &= \alpha \cdot (x \times y)\,,\\
x \times (y+z) &= x \times y + x \times z\,,\\
x \times y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ x||y,\\
|x \times y|^2 &= |x|^2\,|y|^2 - \langle x, y\rangle^2\,,
\end{aligned}
$$

die jeweils elementar nachgerechnet werden können. Das gleiche gilt für die Formeln

$$
\begin{aligned}
x \times (y \times z) &= \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z\\
\langle x \times y, v \times w\rangle &= \langle x, v\rangle \cdot \langle y, w\rangle - \langle y, v\rangle \cdot \langle x, w\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Das Kreuzprodukt hat keine Gruppenstruktur, denn ansonsten gäbe es z.B. ein neutrales Element e. Wegen $e = e \times e = 0$ und $0 \times x = 0$ führt dies für $x \neq 0$ zum Widerspruch. Das Kreuzprodukt ist auch nicht assoziativ!



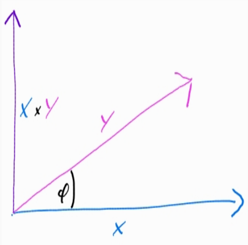


Abbildung: Links: Die Höhe des Parallelogramms ist durch $|y| \sin \varphi$ gegeben. Damit ist seine Fläche gleich $|x|\,|y| \sin \varphi = |x \times y|$. **Rechts:** Die Vektoren x und y liegen in der Zeichnung auf der horizontalen Ebene. Ihr Kreuzprodukt hat die in der Zeichnung angegebene Richtung. Dies entspricht einem Rechts-System.

Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ liefert eine weitere einfache Rechnung

$$\langle x \times y, x \rangle = 0 = \langle x \times y, y \rangle .$$

Damit steht $x \times y$ senkrecht zu x und y und damit auch senkrecht zu der von x und y und 0 aufgespannten Ebene $\mathcal{E}$, d.h. zu

$$\mathcal{E} := \left\{ \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Umgekehrt ist $\mathcal{E}$ gleich der Menge aller Vektoren, die senkrecht zu $x \times y$ stehen. Neben der geometrischen Anschauung kann man dies z.B. durch Lösen der Gleichung $\langle x \times y, z \rangle = 0$ nach z elementar nachrechnen. Im Sommersemester werden wir sehen, dass dies auch aus einfachen Dimensions-Betrachtungen folgt.

Aus Satz 3.1.3 wissen wir ferner $\langle x, y\rangle^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 \cos^2 \varphi$, wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen den Strecken $\overline{0x}$ und $\overline{0y}$ ist. Aus den Rechenregeln des Kreuzprodukts und dem Satz des Pythagoras folgern wir damit, dass

$$\begin{aligned} |x \times y|^2 &= |x|^2\,|y|^2 - \langle x, y\rangle^2 \\ &= |x|^2\,|y|^2(1 - \cos^2 \varphi) \\ &= |x|^2\,|y|^2 \sin^2 \varphi\,. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten haben wir

$$|x \times y| = |x|\,|y| \sin \varphi\,,$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite dem **Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms** entspricht, siehe Abbildung 12.

Mit den bisherigen geometrischen Eigenschaften gibt es nur noch zwei geometrische Möglichkeiten für das Kreuzprodukt, die sich auch nur in ihrem Vorzeichen unterscheiden. Da $x, y, x \times y$ immer ein **Rechts-System** bildet, siehe Abbildung 12, ist das Kreuzprodukt eindeutig geometrisch beschreibbar.

Section 3.2
Geraden und Ebenen

Vektoren im Raum kann man nutzen, um geometrische Konzepte einfach zu beschreiben. Wir sammeln dazu einige Geraden- und Ebenengleichungen und zeigen, wie man mit diesen einfache Aufgabenstellungen der analytischen Geometrie lösen kann.

Eine **Gerade** g im Raum $\mathbb{R}^d$ ist bestimmt durch einen ihrer Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und eine Richtung $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Das führt zur Beschreibung

$$g = \{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\} .$$

Damit ist jedem Paar (x_0, v) von Vektoren $x_0, v \in \mathbb{R}^d$ eine Gerade zugeordnet. Die Zuordnung ist nicht injektiv, da z.B. (x_0, v) und $(x_0, -v)$ die gleichen Geraden beschreiben. Analog kann man den **Stützpunkt** x_0 durch jeden anderen Punkt x_0' der Geraden ersetzen, ohne dabei die Gerade zu ändern.

Durch den **Richtungsvektor** v haben wir der Gerade eine Richtung gegeben, wir sprechen deswegen auch von einer **gerichteten Geraden**.

Eine **Ebene** $\mathcal{E}$ im Raum $\mathbb{R}^3$ wird analog zu Geraden durch einen ihrer Punkte x_0 und zwei nichtparallele Richtungen $v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bestimmt, d.h.

$$\mathcal{E} = \{x_0 + sv + tw \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Forderung, dass v und w nichtparallel sind, kann hierbei durch $v \times w \neq 0$ ausgedrückt werden. Die Darstellung von $\mathcal{E}$ heißt **Punkt-Richtungsform** oder auch **Parameterform**. Wie bei Geraden, kann eine Ebene durch verschiedene **Stützpunkte** x_0 und **Richtungsvektoren** v, w dargestellt werden.

Das folgende Lemma zeigt, dass es einen ausgezeichneten Stützpunkt gibt.

Lemma 3.2.1

Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die durch den Stützpunkt x_0 und die Richtungsvektoren v, w dargestellt ist. Dann gibt es genau einen Punkt $x_0^* \in \mathcal{E}$ mit $\langle x_0^*, v\rangle = 0$ und $\langle x_0^*, w\rangle = 0$.

Die beiden Gleichungen bedeuten, dass x_0^* senkrecht zu der von v und w aufgespannten Ebene $\mathcal{E}'$ mit Stützpunkt 0 steht. Mit unserer geometrischen Interpretation des Kreuzprodukts gilt daher $x_0^* = \alpha(v \times w)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Damit ist x_0^* auch auf der Geraden g mit Richtungsvektor $v \times w$ und Stützvektor 0. Insgesamt erhalten wir also $x_0^* \in g \cap \mathcal{E}$.

Der folgende Beweis beruht nicht auf diesem geometrischen Argument, sondern auf dem Gauß-Algorithmus zum Lösen eines linearen Gleichungssystems, das in diesem Fall ein einfaches 2×2-System ist, da wir auf diese Weise diesen Algorithmus in Erinnerung rufen können.

Zunächst stellen wir fest, dass die Ebene $\mathcal{E}$ sich nicht ändert, wenn wir statt v und w die normierten Vektoren $|v|^{-1}v$ und $|w|^{-1}w$ betrachten. Das gleiche gilt für die beiden Orthogonalitätsgleichungen. Im folgenden nehmen wir daher $|v| = |w| = 1$ an. Es gilt dann $0 \neq |v \times w|^2 = |v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2 = 1 - \langle v, w\rangle^2$.

Wegen $x_0^* \in \mathcal{E}$ muss es $s, t \in \mathbb{R}$ geben, so dass

$$x_0^* = x_0 + sv + tw$$

gilt. Setzt man dies in die beiden Gleichungen $\langle x_0^*, v\rangle = 0$ und $\langle x_0^*, w\rangle = 0$ ein, ergibt sich

$$\langle x_0, v\rangle + s\langle v, v\rangle + t\langle v, w\rangle = 0$$
$$\langle x_0, w\rangle + s\langle v, w\rangle + t\langle w, w\rangle = 0\,.$$

Wegen $|v| = |w| = 1$ haben wir dann für $a := \langle v, w\rangle$, $c_1 := -\langle x_0, v\rangle$ und $c_2 := -\langle x_0, w\rangle$ die beiden Gleichungen

$$s + at = c_1$$
$$as + t = c_2\,.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit a und zieht man das Ergebnis dann von der zweiten Gleichung ab, so ergibt sich das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s + at &= c_1 \\ 0s + t(1-a^2) &= c_2 - ac_1 \,. \end{aligned}$$

Dazu äquivalent ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s + at &= c_1 \\ t &= \frac{c_2 - ac_1}{1-a^2} \,, \end{aligned}$$

wobei wir $0 \neq 1 - \langle v, w\rangle^2 = 1 - a^2$ benutzt haben. Multipliziert man nun die zweite Gleichung mit a und zieht sie im Anschluss von der ersten Gleichung ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} s &= c_1 - a \cdot \frac{c_2 - ac_1}{1-a^2} \\ t &= \frac{c_2 - ac_1}{1-a^2} \,. \end{aligned}$$

Wegen

$$c_1 - a \cdot \frac{c_2 - ac_1}{1 - a^2} = \frac{c_1(1 - a^2) - ac_2 - a^2 c_1}{1 - a^2} = \frac{c_1 - ac_2}{1 - a^2}$$

haben wir damit insgesamt

$$\begin{aligned} s &= \frac{c_1 - ac_2}{1 - a^2} = \frac{-\langle x_0, v\rangle + a\langle x_0, w\rangle}{1 - a^2} = \frac{\langle x_0, aw - v\rangle}{1 - a^2} \\ t &= \frac{c_2 - ac_1}{1 - a^2} = \frac{-\langle x_0, w\rangle + a\langle x_0, v\rangle}{1 - a^2} = \frac{\langle x_0, av - w\rangle}{1 - a^2} \,. \end{aligned}$$

Damit ist der Punkt x_0^* durch

$$x_0^* = x_0 + sv + tw = x_0 + \frac{\langle x_0, aw - v\rangle}{1 - a^2} \cdot v + \frac{\langle x_0, av - w\rangle}{1 - a^2} \cdot w \,.$$

Wir beachten dabei, dass wegen $a = \langle v, w\rangle$ und $|v| = |w| = 1$ der Vektor aw der Projektion von v auf w entspricht und der Vektor av der Projektion von w auf v entspricht, vgl. Abbildung 11. Ferner gilt $1 - a^2 = |v \times w|^2$.

Neben der Punkt-Richtungsform gibt es eine weitere Möglichkeit, eine Ebene zu beschreiben. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Theorem 3.2.2

Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die durch den Stützpunkt x_0 und die Richtungsvektoren v, w dargestellt ist. Wir definieren

$$n := \frac{v \times w}{|v \times w|} \qquad \text{und} \qquad d := \frac{\langle x_0, v \times w \rangle}{|v \times w|}\,.$$

Dann gilt

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, n \rangle = d\}\,.$$

Die in dem obigen Satz gefundene, alternative Beschreibung von $\mathcal{E}$ heißt **Hessesche Normalform**. Diese kann genutzt werden, um Abstände von Punkten zu Ebenen zu berechnen. Für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ beschreibt

$$\mathrm{d}(x, \mathcal{E}) := \langle x, n \rangle - d$$

den *orientierten* Abstand von x zu der Ebene $\mathcal{E}$, wobei die Orientierung in Richtung des Normalenvektors gemessen wird. Mit anderen Worten gilt $\mathrm{d}(x, \mathcal{E}) > 0$ genau dann wenn, x auf der Seite der Ebene liegt, in die der Normalenvektor zeigt. Damit ist $|\langle x, n \rangle - d|$ der Abstand zwischen x und $\mathcal{E}$. Für $x := 0$ erhalten wir insbesondere den Wert $-d$, der den orientierten Abstand von $\mathcal{E}$ zum Ursprung wiedergibt und daher ist $|d|$ der Abstand der Ebene zum Ursprung.

Wir setzen $\mathcal{E}' := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, n \rangle = d\}$, so dass wir $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ zeigen müssen.

Sei dazu zunächst $x \in \mathcal{E}$. Dann gibt es $s, t \in \mathbb{R}$ mit $x = x_0 + sv + tw$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\langle x, n \rangle = \frac{\langle x_0 + sv + tw, v \times w \rangle}{|v \times w|} &= \frac{\langle x_0, v \times w \rangle}{|v \times w|} + \frac{s \langle v, v \times w \rangle}{|v \times w|} + \frac{t \langle w, v \times w \rangle}{|v \times w|} \\ &= d\,.\end{aligned}$$

Sei umgekehrt $x \in \mathcal{E}'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle x - x_0, v \times w \rangle = \langle x, v \times w \rangle - \langle x_0, v \times w \rangle &= \langle x, v \times w \rangle - d\,|v \times w| \\ &= \big(\langle x, n \rangle - d\big)|v \times w| \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Damit muss nach unserer geometrischen Interpretation des Kreuzprodukts der Punkt $x - x_0$ in der von v und w aufgespannten Ebene sein, d.h. es gibt $s, t \in \mathbb{R}$ mit $x - x_0 = sv + tw$. Dies zeigt $x \in \mathcal{E}$.

Gegeben seien zwei Geraden

$$g_1 = \{x_1 + tv_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

und

$$g_2 = \{x_2 + tv_2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

durch Stützpunkte x_i und in Richtungen v_i mit $v_1 \times v_2 \neq 0$.

Wir fragen nach dem Abstand beider Geraden, also der Länge derjenigen Verbindungsstrecke, welche auf beiden Geraden senkrecht steht. Dieser Abstand ist insbesondere gleich dem Abstand der beiden parallelen Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ zu den Richtungsvektoren v_1 und v_2, die jeweils x_1 beziehungsweise x_2 enthalten.

Nun ist der orientierte Abstand der Ebene $\mathcal{E}_i$ zum Ursprung durch

$$d_i := \frac{\langle x_i, v_1 \times v_2 \rangle}{|v_1 \times v_2|}$$

gegeben. Der Abstand von $\mathcal{E}_1$ zu $\mathcal{E}_2$ berechnet sich damit durch

$$|d_1 - d_2| = \left| \frac{\langle x_1, v_1 \times v_2 \rangle}{|v_1 \times v_2|} - \frac{\langle x_2, v_1 \times v_2 \rangle}{|v_1 \times v_2|} \right| = \frac{|\langle x_1 - x_2, v_1 \times v_2 \rangle|}{|v_1 \times v_2|} \,.$$

Gegeben seien eine Gerade

$$g = \{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$

und eine Ebene in Hessescher Normalform

$$\mathcal{E} = \{x \mid \langle x, n\rangle = d\}.$$

Wir fragen nach möglichen Schnittpunkten von der Geraden g und der Ebene $\mathcal{E}$. Angenommen es gibt ein $x \in g \cap \mathcal{E}$. Dann gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x = x_0 + tv$ und es gilt

$$d = \langle x_0 + tv, n\rangle = \langle x_0, n\rangle + t\langle v, n\rangle\,.$$

Im Fall $\langle v, n\rangle \neq 0$ ergibt dies

$$t = \frac{d - \langle x_0, n\rangle}{\langle v, n\rangle}$$

und Einsetzen von t in die Geradengleichung liefert einzigen Schnittpunkt x.

Gilt andererseits $\langle v, n\rangle = 0$, also $v \perp n$, so ist der Richtungsvektor der Geraden parallel zur Ebene und es gilt entweder $g \subset \mathcal{E}$ oder $g \cap \mathcal{E} = \emptyset$.

Wir betrachten nun den Schnitt zweier Ebenen in Hessescher Normalform

$$\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n_1 \rangle = d_1\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n_2 \rangle = d_2\}.$$

Sind die Ebenen parallel, gilt also $n_1 = \pm n_2$, so gilt entweder $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ oder $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset$.

Sind die Ebenen nicht parallel, so sind n_1 und n_2 nicht parallel und damit gilt sowohl $v := n_1 \times n_2 \neq 0$ als auch $\langle n_1, n_2 \rangle^2 \neq 1$, wobei letzteres z.B. aus Satz 3.1.3 folgt.

Wir nehmen nun zunächst an, wir haben schon ein $x_0 \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ gefunden. Wir wollen dann

$$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = g := \{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$

zeigen. Dazu sei zunächst $t \in \mathbb{R}$ und $x := x_0 + tv$. Dann gilt

$$\langle x, n_i \rangle = \langle x_0, n_i \rangle + t\langle v, n_i \rangle = \langle x_0, n_i \rangle + t\langle n_1 \times n_2, n_i \rangle = \langle x_0, n_i \rangle = d_i \,.$$

Damit haben wir $\{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ gezeigt. Die andere Inklusion kann man jetzt auch formal beweisen, da aber der Schnitt von $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ aus geometrischer Anschauung im Fall $n_1 \times n_2 \neq 0$ eine Gerade ist, kann es keinen weiteren Punkt $x \in (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) \setminus g$ geben. Aus diesem Grund überspringen wir den formalen Beweis der anderen Inklusion.

Um g vollständig zu bestimmen, müssen wir also noch ein $x_0 \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ finden. Dies könnte man z.B. dadurch erreichen, dass man eine Lösung x_0 des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \langle x, n_1 \rangle &= d_1 \,, \\ \langle x, n_2 \rangle &= d_2 \end{aligned}$$

bestimmt. Hier wollen wir stattdessen zeigen, dass

$$x_0 := d_1 n_1 + \frac{d_2 - d_1 \langle n_1, n_2 \rangle}{\langle n_1, n_2 \rangle^2 - 1} \cdot \Big(\langle n_1, n_2 \rangle n_1 - n_2 \Big)$$

eine explizite Lösung ist. Dazu betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} \langle x_0, n_1 \rangle &= \langle d_1 n_1, n_1 \rangle + \frac{d_2 - d_1 \langle n_1, n_2 \rangle}{\langle n_1, n_2 \rangle^2 - 1} \cdot \big\langle \langle n_1, n_2 \rangle n_1 - n_2, n_1 \big\rangle \\ &= d_1 + \frac{d_2 - d_1 \langle n_1, n_2 \rangle}{\langle n_1, n_2 \rangle^2 - 1} \cdot \big(\langle n_1, n_2 \rangle \cdot \langle n_1, n_1 \rangle - \langle n_1, n_2 \rangle \big) \\ &= d_1 \,, \end{aligned}$$

wobei wir zweimal $\langle n_1, n_1 \rangle = 1$ ausgenutzt haben.

Analog gilt

$$\begin{aligned}\langle x_0, n_2\rangle &= \langle d_1 n_1, n_2\rangle + \frac{d_2 - d_1\langle n_1, n_2\rangle}{\langle n_1, n_2\rangle^2 - 1} \cdot \big\langle \langle n_1, n_2\rangle n_1 - n_2, n_2 \big\rangle \\ &= d_1\langle n_1, n_2\rangle + \frac{d_2 - d_1\langle n_1, n_2\rangle}{\langle n_1, n_2\rangle^2 - 1} \cdot \big(\langle n_1, n_2\rangle^2 - \langle n_2, n_2\rangle \big) \\ &= d_2\,,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\langle n_2, n_2\rangle = 1$ ausgenutzt haben.

CHAPTER 4: GRENZWERTE

Section 4.1
Konvergenz von Folgen

Im $\mathbb{R}^d$ haben wir neben dem Betrag schon weitere Normen kennengelernt. Wir wollen nun diese Betrachtungen noch etwas weiter verallgemeinern, indem wir einen allgemeinen Abstandsbegriff für Paare von Objekten einführen.

Definition 4.1.1

Sei X eine nichtleere Menge. Dann heißt eine Abbildung $\mathbf{d} : X \times X \to [0, \infty)$ **Metrik** auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

i). **Definitheit:** $\mathbf{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii). **Symmetrie:** $\mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}(y, x)$.

iii). **Dreiecksungleichung:** $\mathbf{d}(x, y) \leq \mathbf{d}(x, z) + \mathbf{d}(z, y)$.

In diesem Fall heißt $(X, \mathbf{d})$ **metrischer Raum**.

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem Vektorraum V, so definiert $\mathbf{d}(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V. In diesem Sinne ist jeder normierte Raum auch ein metrischer Raum. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht. Eine einfaches Beispiel hierfür sind echte Teilmengen $X \subset V$, die ebenfalls mit Hilfe der Norm zu einem metrischen Raum werden. Es gibt aber auch Beispiele von Metriken, die keinen Zusammenhang mit Normen besitzen.

WEITERE BEGRIFFE FÜR METRISCHE RÄUME

Ist $(X, \mathbf{d})$ ein metrischer Raum, so gilt auch die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$\left|\mathbf{d}(x,z) - \mathbf{d}(z,y)\right| \leq \mathbf{d}(x,y)$$

für alle $x, y, z \in X$.

Ist $(X, \mathbf{d})$ ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$, so heißt

$$U(x,r) := \{y \in X : \mathbf{d}(x,y) < r\}$$

die **offene Kugel** um x mit Radius r. Analog bezeichnen wir

$$B(x,r) := \{y \in X : \mathbf{d}(x,y) \leq r\}$$

als die **abgeschlossene Kugel** um x mit Radius r.

In $\mathbb{R}$ gilt $U(x,r) = (x-r, x+r)$ und $B(x,r) = [x-r, x+r]$. Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ sind die offenen, bzw. abgeschlossenen Kugeln bezüglich der Betragsmetrik die Kreise ohne bzw. mit Rand.

Lemma 4.1.2
Sei (X, d) *ein metrischer Raum,* $x, y \in X$*,* $r > 0$ *und* $s \geq r + \mathrm{d}(x, y)$*. Dann gilt*

$$U(y, r) \subset U(x, s) \qquad \textit{und} \qquad B(y, r) \subset B(x, s)\,.$$

Beweis.
Sei $z \in U(y, r)$. Dann gilt $\mathrm{d}(y, z) < r$ und daher folgt

$$\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z) < \mathrm{d}(x, y) + r \leq s\,.$$

Dies zeigt $z \in U(x, s)$. Die zweite Inklusion kann analog gezeigt werden. □

ABSTÄNDE ZWISCHEN MENGEN

Ist $(X, \mathbf{d})$ ein metrischer Raum, $x \in X$ und $A \subset X$ nichtleer, so heißt

$$\mathbf{dist}(x, A) := \inf\{\mathbf{d}(x, y) : y \in A\}$$

der **Abstand** von x zu der Menge A. Ist $B \subset X$ eine weitere, nichtleere Menge, so heißt

$$\mathbf{dist}(A, B) := \inf\{\mathbf{d}(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

der Abstand zwischen den Mengen A und B.

Offensichtlich gilt $\mathbf{dist}(x, A) = \mathbf{dist}(\{x\}, A)$ und $\mathbf{dist}(A, B) = \mathbf{dist}(B, A)$. Ist ferner $A \subset B$, so gilt

$$\mathbf{dist}(x, B) \leq \mathbf{dist}(x, A)\,, \qquad x \in X.$$

Ist $x \in A$, so gilt $\mathbf{dist}(x, A) = 0$. Dies ist aber nicht der einige Fall, in dem der Abstand verschwinden kann. So gilt beispielsweise in $\mathbb{R}$ mit der Betragsmetrik für $A = (0, 1)$ und $x = 0$ ebenfalls $\mathbf{dist}(x, A) = 0$.

Analog gilt $\mathbf{dist}(A, B) = 0$ für Mengen A und B mit $A \cap B \neq \emptyset$, aber dies ist wieder nicht der einzige Fall, wie man schon aus der Kombination der vorherigen Bemerkungen schließen kann.

Im folgenden wollen wir die Konvergenz von Folgen untersuchen. Dazu führen wir den Begriff einer Folge zunächst formal ein:

Definition 4.1.3

Sei X eine nichtleere Menge. Dann ist eine **Folge** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$, deren Funktionswert im Punkt $n \in \mathbb{N}$ mit x_n bezeichnet wird.

Manchmal werden wir auch Folgen mit Indexbereich $\mathbb{N}_0$ betrachten. Folgen werden auch mit $(x_n)_{n\geq 1}$ bzw. $(x_n)_{n\geq 0}$ bezeichnet. Wir schreiben auch manchmal $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$, um auf kurze Weise zu sagen, dass die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in X liegt.

Die folgenden Definitionen sind von grundlegender Bedeutung für den Rest des Vorlesungszyklus:

Definition 4.1.4

Sei $(X, \mathbf{d})$ ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann heißt die Folge:

i). **beschränkt**, falls es eine $B > 0$ und ein $y \in X$ gibt mit $\mathbf{d}(x_n, y) \leq B$ für alle $n \geq 1$.

ii). **Cauchyfolge**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \geq 1 \forall n, m \geq n_\varepsilon : \mathbf{d}(x_n, x_m) < \varepsilon \,.$$

iii). **konvergent**, falls es ein $x \in X$ gibt, so dass gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \geq 1 \forall n \geq n_\varepsilon : \mathbf{d}(x_n, x) < \varepsilon \,.$$

In diesem Fall heißt x **Grenzwert** oder **Limes** der Folge und wir sagen, dass die Folge **gegen x konvergiert**.

In $\mathbb{R}$ ist die Folge, die durch $x_n := 1/n$ definiert ist, wegen

$$|x_n - 0| = |1/n| \le 1$$

beschränkt, da wir $y := 0$ und $B := 1$ wählen können. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach dem Archimedischen Axiom, siehe Satz 2.4.4, finden wir dann ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon^{-1} < \varepsilon$. Für $n \ge n_\varepsilon$ folgt dann mit $x := 0$:

$$|x_n - x| = |1/n| \le |1/n_\varepsilon| < \varepsilon\,.$$

Mit anderen Worten ist die Folge auch konvergent, und nach dem etwas späteren Satz 4.1.6 damit auch eine Cauchyfolge.

Schließlich bemerken wir, dass die Folge $x_n := n^{-1/k}$ für $k \in \mathbb{N}$ ebenfalls gegen 0 konvergiert. Für den Beweis nehmen wir mit dem Archimedischen Axiom ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon^{-1} < \varepsilon^k$ und wiederholen die obige Abschätzung.

Die Folge, die durch $x_n := n^2$ definiert ist, weder beschränkt noch konvergent, und wie wir in Satz 4.1.6 sehen werden, auch keine Cauchy-Folge.

Reelle Folgen, die gegen 0 konvergieren, werden auch **Nullfolgen** genannt. Analog gilt dies für Folgen in $\mathbb{C}$ oder in normierten Räumen.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ konvergiert gegen ein x, genau dann wenn

$$y_n := \|x_n - x\|$$

eine reelle Nullfolge definiert. Dies folgt sofort aus der Gleichung

$$\|x_n - x\| = \big|\|x_n - x\| - 0\big| .$$

Im Fall $x = 0$ sehen wir damit, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Nullfolge ist, genau dann wenn $(\|x_n\|)_{n\geq 1}$ eine reelle Nullfolge ist. Dies gilt insbesondere für die Betragsmetrik auf $\mathbb{R}$.

BESCHRÄNKTE UND KONSTANTE FOLGEN

In einem normierten Raum ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt genau dann, wenn es ein $\tilde{B} \geq 0$ gibt mit $\|x_n\| \leq \tilde{B}$ für alle $n \geq 1$. Die nicht ganz triviale Richtung folgt hierbei aus $\|x_n\| \leq \|x_n - y\| + \|y\| \leq B + \|y\| =: \tilde{B}$.

Eine **konstante Folge** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d), d.h. eine Folge mit $x_n = x^*$ für ein $x^* \in X$ und alle $n \geq 1$, konvergiert immer gegen x^*, da $\mathrm{d}(x_n, x^*) = 0$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Das folgende Lemma zeigt, dass eine konvergente Folge genau einen Grenzwert hat.

Lemma 4.1.5

Sei (X, d) *ein metrischer Raum und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge in* X*. Dann gibt es genau einen Grenzwert der Folge.*

Wegen des Lemmas 4.1.5 bezeichnen wir den eindeutigen Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n$. Ferner schreiben wir auch $x_n \to x$ für $n \to \infty$, falls die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Wir nehmen an, es gibt zwei verschiedene Grenzwerte x und y. Damit gilt $\varepsilon := \mathrm{d}(x,y)/2 > 0$. Da die Folge gegen x konvergiert, gibt es dann ein $n_\varepsilon \geq 1$ mit

$$\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Analog gibt es ein $m_\varepsilon \geq 1$ mit

$$\mathrm{d}(x_n, y) < \varepsilon$$

für alle $n \geq m_\varepsilon$. Für $n := n_\varepsilon + m_\varepsilon$ haben wir dann $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ und damit folgt

$$\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x, x_n) + \mathrm{d}(x_n, y) < 2\varepsilon = \mathrm{d}(x,y)\,.$$

Damit haben wir einen Widerspruch gefunden.

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang zwischen den 3 Begriffen für Folgen her.

Theorem 4.1.6

Sei (X, d) *ein metrischer Raum und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in X. Dann gilt:*

i). Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent, so ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge.*

ii). Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge, so ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt.*

i). Sei x der Grenzwert der Folge und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \geq 1$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ die Ungleichung $\mathsf{d}(x, x_n) < \varepsilon/2$ gilt. Für $m, n \geq n_\varepsilon$ haben wir damit

$$\mathsf{d}(x_n, x_m) \leq \mathsf{d}(x_n, x) + \mathsf{d}(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

ii). Für $\varepsilon := 1$ gibt es ein $n_\varepsilon \geq 1$ so dass $\mathsf{d}(x_n, x_m) < 1$ für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt. Wir definieren $y := x_{n_\varepsilon}$ und

$$B := 1 + \max\{\mathsf{d}(x_n, y) : 1 \leq n < n_\varepsilon\}\,.$$

Für $n < n_\varepsilon$ haben wir damit $\mathsf{d}(x_n, y) \leq \max\{\mathsf{d}(x_k, y) : 1 \leq k < n_\varepsilon\} < B$ und für $n \geq n_\varepsilon$ gilt $\mathsf{d}(x_n, y) = \mathsf{d}(x_n, x_{n_\varepsilon}) < 1 \leq B$.

Die Umkehrungen des Satzes 4.1.6 sind im Allgemeinen falsch.

So ist beispielsweise die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, die durch $x_n := (-1)^n$ für alle $n \geq 1$ definiert ist, beschränkt mit $y := 0$ and $B := 1$, sie ist aber keine Cauchyfolge, da für alle $n \geq 1$

$$|x_n - x_{n+1}| = |(-1)^n| \cdot |1 - (-1)^1| = 2$$

gilt.

Betrachten wir wieder die Folge, die durch $x_n := 1/n$ definiert ist, so haben wir bereits gesehen, dass $\lim x_n = 0$ gilt. Damit ist die Folge nach Satz 4.1.6 eine Cauchyfolge. Betrachten wir diese Folge nun in dem Intervall $X := (0, \infty)$, das wieder mit der Betragsmetrik d ausgestattet ist, so ist die Folge weiterhin eine Cauchyfolge. Sie ist aber in (X, d) nicht mehr konvergent, da der einzig mögliche Grenzwert $x := 0$ nicht in X liegt!

Wir werden später allerdings sehen, dass, im Unterschied zu $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{R}$ jede Cauchyfolge konvergent ist.

Mit Grenzwerten reeller Zahlenfolgen kann man Rechnen, wie der folgende Satz zeigt. Man beachte, dass in diesen Satz jeweils gleichzeitig Konvergenz gezeigt und ein Grenzwert berechnet wird.

Theorem 4.1.7

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ zwei konvergente Folgen. Dann gilt:

i). *Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \,.$$

ii). *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \,.$$

iii). *Ist $x_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, so konvergiert $(x_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} \,.$$

iv). *Ist $x_n \leq y_n$ für alle $n \geq 1$, so gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.*

Wir wollen exemplarisch nur die Aussagen *ii)* und *iv)* zeigen. Dazu seien $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$.

ii). Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es nach Satz 4.1.6 ein $B > 0$ mit $|x_n| \leq B$ für alle $n \geq 1$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_\varepsilon \geq 1$ und $m_\varepsilon \geq 1$ mit $|x_n - x| < \varepsilon/(2|y|+1)$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ bzw. $|y_n - y| < \varepsilon/(2B)$ für alle $n \geq m_\varepsilon$. Für $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ folgt dann

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| &\leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| \\ &\leq B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{2|y|+1} \cdot |y| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

wobei wir $|y|/(2|y|+1) \leq 1/2$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ausgenutzt haben.

iv). Wir nehmen an, dass stattdessen $x > y$ gilt. Wir betrachten dann $\varepsilon := (x-y)/2$. Dann gibt es $n_\varepsilon \geq 1$ und $m_\varepsilon \geq 1$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ bzw. $|y_n - y| < \varepsilon$ für alle $n \geq m_\varepsilon$. Für $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ folgt dann einerseits

$$x - x_n \leq |x_n - x| < \varepsilon = \frac{x-y}{2}$$

und damit $x_n > (x+y)/2$, und andererseits

$$y_n - y \leq |y_n - y| < \varepsilon = \frac{x-y}{2}$$

und damit $y_n < (x+y)/2$. Zusammen ergibt dies $y_n < (x+y)/2 < x_n$ und damit haben wir einen Widerspruch gefunden.

Da konstante Folgen konvergent sind, folgt aus *ii)* für eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ insbesondere, dass $(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Diese Aussage und *i)* gelten sogar in allen normierten Räumen, wobei die Beweise analog zu denen in $\mathbb{R}$ sind.

Sind die Annahmen $x_n \neq 0$ in *iii)* und $x_n \leq y_n$ in *iv)* nur für alle $n \geq n_0$ erfüllt, so gelten weiterhin die Aussagen.

Das folgende Korollar ist manchmal ebenfalls nützlich.

Korollar 4.1.8

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *und* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $x_n \to 0$ *genau dann, wenn* $x_n^k \to 0$.

Beweis.

Die Konvergenz $x_n^k \to 0$ folgt durch $(k-1)$-maliges Anwenden von Satz 4.1.7.
Sei umgekehrt $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \geq 1$ mit $|x_n^k| < \varepsilon^k$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.
Dies ergibt $|x_n| < \varepsilon$ und damit haben wir $x_n \to 0$ gezeigt. $\square$

Der folgende Satz ist als **Vergleichskriterium** bekannt. Man beachte dabei, dass die wesentliche Aussage die Konvergenz der Zwischenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: In der Tat folgt die Gleichheit der Grenzwerte schon direkt aus zweimaligem Anwenden von Satz 4.1.7 *iv)*, falls die Konvergenz von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusätzlich bekannt ist.

Theorem 4.1.9

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, für die es ein $n_0 \geq 1$ gibt mit

$$x_n \leq z_n \leq y_n$$

für alle $n \geq n_0$. Konvergieren dann die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$, so konvergiert auch die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \,.$$

Wir setzen $c := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $n_\varepsilon \geq 1$ mit $|x_n - c| < \varepsilon$ und $|y_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Für diese n gilt dann auch

$$z_n - c \leq y_n - c \leq |y_n - c| < \varepsilon$$

und analog $c - z_n \leq c - x_n \leq |x_n - c| < \varepsilon$. Wegen $|a| = \max\{a, -a\}$ folgt dann zusammengenommen

$$|z_n - c| < \varepsilon$$

für alle $n \geq 1$.

Das folgende Lemma führt die Konvergenz im $\mathbb{R}^d$ auf die Konvergenz im Reellen zurück. Analoge Aussagen gelten auch für die Supremumsnorm und die 1-Norm:

Lemma 4.1.10

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ eine Folge und $x^* \in \mathbb{R}^d$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$x_n \to x^*$ bezüglich der Betragsmetrik.*
2. *Für alle $i = 1, \dots, d$ konvergiert die Folge $(x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ der i-ten Koordinaten der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die i-te Koordinate x_i^* von x^*.*

Bevor wir das Lemma beweisen, bemerken wir noch dass damit in $\mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile konvergieren.

Unsere Notationen liefern

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(d)} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_d^* \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$|x_n - x^*|^2 = (x_n^{(1)} - x_1^*)^2 + \cdots + (x_n^{(d)} - x_d^*)^2 \tag{4.1.1}$$

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Wir betrachten die *i*-te Koordinate. Aus der angenommenen Konvergenz $x_n \to x^*$ folgt $|x_n - x^*| \to 0$ und mit Satz 4.1.7 dann auch $|x_n - x^*|^2 \to 0$. Unsere anfängliche Betrachtung (4.1.1) liefert ferner

$$0 \leq (x_n^{(i)} - x_i^*)^2 \leq |x_n - x^*|^2 .$$

Das Vergleichskriterium aus Satz 4.1.9 sichert dann $(x_n^{(i)} - x_i^*)^2 \to 0$ und wegen Korollar 4.1.8 erhalten wir $x_n^{(i)} - x_i^* \to 0$, d.h. $x_n^{(i)} \to x_i^*$ nach Satz 4.1.7.

ii) $\Rightarrow$ *i)*. Die Gleichung (4.1.1) zusammen mit Korollar 4.1.8 und Satz 4.1.7 ergibt $|x_n - x^*|^2 \to 0$. Mit Korollar 4.1.8 erhalten wir $|x_n - x^*| \to 0$ und damit $x_n \to x^*$ bezüglich der Betragsmetrik.

Wir fixieren zunächst ein $k \in \mathbb{Z}$ und definieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_n := n^{-k}\,.$$

Für $k = 0$ gilt dann $x_n = 1$ für alle $n \geq 1$ und damit konvergiert diese konstante Folge gegen 1. Ist $k \geq 1$, so gilt wegen $\lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0$ und Korollar 4.1.8

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0\,. \tag{4.1.2}$$

Mit dem Archimedischen Axiom kann man schließlich schnell zeigen, dass im Fall $k < 0$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Betrachten wir nun die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $x_n := n^{-1}\sin n$ definiert ist. Wegen

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}\,,$$

folgt dann mit dem Vergleichskriterium aus Satz 4.1.9 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Lemma 4.1.11

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis.

Wir betrachten die Folge $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Es gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$ und nach dem binomischen Satz gilt für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned} n = (a_n + 1)^n &= 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \,, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt wahr ist, da wir nichtnegative Summanden weggelassen haben. Es folgt

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

für $n \geq 2$ folgt. Damit erhalten wir $a_n \longrightarrow 0$ mit Hilfe von $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{n} = 0$, von Satz 4.1.7, und dem Vergleichskriterium aus Satz 4.1.9.
Satz 4.1.7 liefert dann die Behauptung. $\square$

Mit Satz 4.1.7 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1\,,$$

wobei die Gleichung von rechts nach links gelesen einen Beweis der Existenz des Grenzwertes auf der linken Seite liefert, und das anschließende Lesen der Gleichung von links nach rechts die Berechnung des Grenzwertes ergibt.

Die Kombination von Satz 4.1.7 mit (4.1.2) ergibt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6n^4 + 3n^2 + 2}{7n^4 + 12n^3 + 6}\right)^2 &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4 + 3n^2 + 2}{7n^4 + 12n^3 + 6}\right)^2 \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{6 + 3n^{-2} + 2n^{-4}}{7 + 12n^{-1} + 6n^{-4}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{6}{7}\right)^2 \\
&= \frac{36}{49}\,,
\end{aligned}$$

wobei die Existenz und die Berechnung des Grenzwertes wie im Vorherigen Beispiel zu verstehen ist.

Bevor wir noch die Konvergenz von ein paar weiteren Folgen betrachten können, benötigen wir die Folgende Ungleichung, die Bernoulli-Ungleichung genannt wird.

Lemma 4.1.12

Für alle $x \geq -1$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Wir beweisen die Ungleichung per Induktion. Der Induktionsanfang ist durch $(1+x)^1 = (1+x) \geq 1+x$ gegeben. Angenommen, die Ungleichung wurde schon für ein n gezeigt. Dann folgt

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &= 1+nx+x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

und nach dem Induktionsprinzip gilt dann die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.1.13
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$x_n := a^n$$

definierte Folge. Dann gilt:

i). *Für $|a| > 1$ ist die Folge unbeschränkt.*
ii). *Für $|a| < 1$ konvergiert die Folge gegen* 0.
iii). *Für $a = 1$ konvergiert die Folge gegen* 1.
iv). *Für $a = -1$ ist die Folge beschränkt aber nicht konvergent.*

Die Fälle *iii)* und *iv)* wurden schon behandelt.

i). Wir setzen $y := |a| - 1$. Dann gilt $y > 0$ und mit der Ungleichung von Bernoulli folgt

$$|a^n| = (1 + y)^n \geq 1 + ny\,.$$

Geben wir uns nun ein $M > 0$ vor, so gilt

$$1 + ny > M \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{M - 1}{y}$$

und damit $|a^n| > M$ für ebensolche n.

ii). Im Fall $a = 0$ ist die Aussage trivial und daher betrachten wir nur noch den Fall $a \neq 0$.

Wir setzen nun $y := \frac{1}{|a|} - 1$. Dann gilt $y > 0$ und somit folgt mit der Bernoulli-Ungleichung

$$0 \leq |a^n| = |a|^n = \frac{1}{(1+y)^n} \leq \frac{1}{1+ny} =: y_n.$$

Wegen $y_n \to 0$ folgt dann mit dem Vergleichskriterium aus Satz 4.1.9, dass $|a^n - 0|$ eine Nullfolge ist. Dies impliziert $a_n \to 0$.

Lemma 4.1.14

Sei $a \geq 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,.$$

Wir definieren uns eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$y_n := \sqrt[n]{a} - 1\,.$$

Es gilt $y_n \geq 0$ und die Bernoulli-Ungleichung ergibt

$$a = (1 + y_n)^n \geq 1 + ny_n\,.$$

Insgesamt haben wir damit

$$\frac{a-1}{n} \geq y_n \geq 0\,.$$

Wegen $\frac{a-1}{n} \to 0$ folgt dann $y_n \to 0$ mit dem Vergleichskriterium aus Satz 4.1.9. Somit erhalten wir $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Wir hatten gesehen, dass die Implikationen des Satzes 4.1.6 im Allgemeinen keine Äquivalenzen sind. Im folgenden wollen wir jedoch eine Klasse von beschränkten Folgen kennenlernen, für die aus der Beschränktheit schon die Konvergenz folgt.

Wir beginnen mit der folgenden Definition.

Definition 4.1.15

Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton wachsend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_{n+1} \geq x_n$ gilt. Sie heißt **monoton fallend**, falls $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist eine Folge monoton wachsend oder monoton fallend, so heißt sie **monoton**.

Die Folge, die durch $x_n := n^{-k}$ für $k \in \mathbb{N}$ definiert ist, ist monoton fallend, während die durch $y_n := (-1)^n n^{-1}$ definierte Folge nicht monoton ist.

Haben wir eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann existieren nach dem Supremums-Axiom sowohl

$$\inf\{x_n : n \geq 1\} \qquad \text{als auch} \qquad \sup\{x_n : n \geq 1\}\,.$$

Ist die Folge zusätzlich monoton, so zeigt der folgende Satz, dass einer der beiden Werte der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Theorem 4.1.16

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert sie gegen $x := \sup\{x_n : n \geq 1\}$.

Ist die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, so ist die durch $x_n := -y_n$ definierte Folge monoton wachsend und beschränkt. Sie konvergiert nach Satz 4.1.16 gegen $\sup\{x_n : n \geq 1\}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n = -\lim_{n\to\infty} x_n = -\sup\{x_n : n \geq 1\} &= \inf\{-x_n : n \geq 1\}\\ &= \inf\{y_n : n \geq 1\}\,.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da x die kleinste obere Schranke von $\{x_n : n \geq 1\}$ ist, kann $x - \varepsilon$ keine obere Schranke dieser Menge sein. Damit gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_\varepsilon} > x - \varepsilon$. Für $n \geq n_\varepsilon$ folgt dann

$$x - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$

und damit haben wir $|x - x_n| < \varepsilon$ gezeigt.

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

definiert ist, ist monoton wachsend, da alle Summanden nichtnegativ sind. Wegen

$$\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \qquad k \ge 2,$$

und der daraus folgenden Abschätzung

$$\begin{aligned} x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) &\le 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &\le 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

erhalten wir auch $0 \le x_n \le 2$ für alle $n \ge 2$. Damit ist die Folge auch beschränkt und damit nach Satz 4.1.16 konvergent. Allerdings werden wir den Grenzwert dieser Folge erst viel später ausrechnen können.

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

definiert ist, ist monoton wachsend. Wegen

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)k} \le \frac{1}{k(k-1)}$$

für alle $k \ge 2$ erhalten wir

$$x_n \le 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \le 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \le 3\,,$$

wobei wir letzten Schritt das vorherige Beispiel benutzt haben. Damit gilt $0 \le x_n \le 3$ für alle $n \ge 1$, d.h. die Folge ist beschränkt. Sie ist damit auch konvergent und wir bezeichnen ihren Grenzwert als die Eulersche Zahl e,

$$\mathrm{e} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,. \tag{4.1.3}$$

Es gilt, wie wir gerade gezeigt haben, $2 \le \mathrm{e} \le 3$. Die Eulersche Zahl ist uns schon bei der ersten informellen Einführung der Exponentialfunktion begegnet.

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{4.1.4}$$

definiert ist, ist ebenfalls monoton wachsend und beschränkt. Die Monotonie folgt dabei aus der Bernoulli-Ungleichung mit $x := -\frac{1}{n^2} \geq -1$ und

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \\
&\geq \frac{n}{n-1} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die Folge beschränkt ist, betrachten wir zunächst die Abschätzung

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} \\ &= \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &\le \frac{1}{k!}\,.\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Damit folgt mit dem binomischen Lehrsatz 2.2.7 mit $a := \frac{1}{n}$ und $b := 1$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \mathrm{e}\,. \tag{4.1.6}$$

Das folgende Lemma zeigt nun, dass die Folge sogar gegen e konvergiert.

Lemma 4.1.17

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,.$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch (4.1.4) definierte Folge. Wir wissen schon $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \mathrm{e}$ aus unseren Vorüberlegungen.

Für $1 \leq N \leq n$ gilt wegen (4.1.6) und (4.1.5):

$$\begin{aligned} x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &\geq \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{N}{n}\right)^N . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

für alle $N \geq 1$. Für $N \to \infty$ ergibt dies $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \mathrm{e}$.

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so ist die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$y_n := \sup_{m\geq n} x_m := \sup\{x_m : m \geq n\}\,, \qquad n \geq 1 \tag{4.1.7}$$

definiert ist, monoton fallend. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun beschränkt, so gibt es ein $B \geq 0$ mit $|x_n| \leq B$ für alle $n \geq 1$. Damit folgt

$$|y_n| \leq \sup_{m\geq n} |x_m| \leq \sup_{m\geq 1} |x_m| \leq B\,,$$

d.h. die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls beschränkt. Nach Satz 4.1.16 konvergiert dann $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wir definieren den Limes Superior als

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} x_m = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} x_m\,.$$

Definieren wir nun die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$z_n := \inf_{m\geq n} x_m\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{4.1.8}$$

so ist diese monoton wachsend und, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist auch $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dies erlaubt dann die Definition des **Limes Inferior**

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} x_m = \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} x_m\,.$$

Die Definitionen (4.1.8) und (4.1.7) ergeben sofort

$$z_n \leq x_n \leq y_n\,, \qquad n \geq 1.$$

Satz 4.1.7 liefert dann $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$ und im Falle der Gleichheit ergibt das Vergleichskriterium aus Satz 4.1.9 sofort die eine Implikation des folgenden Lemmas:

Lemma 4.1.18

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Folge. Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n\,.$$

Die Implikation “$\Leftarrow$” und die Gleichung folgt, wie schon erwähnt, aus Satz 4.1.9.

Für den Beweis von “$\Rightarrow$’ nehmen wir $\liminf_{n\to\infty} x_n < \limsup_{n\to\infty} x_n$ an. Für

$$\varepsilon := (\limsup_{n\to\infty} x_n - \liminf_{n\to\infty} x_n)/4 > 0$$

gibt es dann ein $n_\varepsilon \geq 1$ mit

$$\inf_{k\geq n} x_n < \liminf_{n\to\infty} x_n + \varepsilon \tag{4.1.9}$$

und

$$\sup_{k\geq n} x_n > \limsup_{n\to\infty} x_n - \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$.

Damit existieren zu jedem $n \geq n_\varepsilon$ zwei Indices $m, k \geq n$ mit

$$x_k < \liminf_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$$

und

$$x_m > \limsup_{n\to\infty} x_n - \varepsilon\,,$$

da z.B. $\liminf_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ wegen (4.1.9) keine untere Schranke der Menge $\{x_k : k \geq n\}$ ist. Dies impliziert

$$|x_m - x_k| \geq x_m - x_k > \limsup_{n\to\infty} x_n - \varepsilon - (\liminf_{n\to\infty} x_n + \varepsilon) = 2\varepsilon\,.$$

Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge und damit auch nicht konvergent.

Wir vereinbaren noch einige Sprechweisen zu Zahlenfolgen. Wir sagen, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergent** ist, falls sie nicht konvergent ist. Wir nennen eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bestimmt divergent gegen ∞**, falls

$$\forall R > 0 \exists n_R \geq 1 \forall n \geq n_R : x_n > R$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir $x_n \to \infty$ oder auch $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Analog heißt die Folge **bestimmt divergent gegen $-\infty$**, falls

$$\forall R > 0 \exists n_R \geq 1 \forall n \geq n_R : x_n < -R\,.$$

In diesem Fall schreiben wir $x_n \to -\infty$ oder auch $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Wir hatten in Satz 4.1.6 gesehen, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist und anhand von Beispielen haben wir ferner gesehen, dass die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist. Der folgende Satz ist daher bemerkenswert.

Theorem 4.1.19

Jede reelle Cauchyfolge konvergiert in $\mathbb{R}$.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchyfolge. Nach Satz 4.1.6 ist die Folge beschränkt, und nach Lemma 4.1.18 reicht es daher

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

zu zeigen. Wie in (4.1.8) und (4.1.7) schreiben wir dazu

$$y_n := \sup_{m\geq n} x_m$$

$$z_n := \inf_{m\geq n} x_m \,.$$

Damit reicht es $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - z_n) = 0 \tag{4.1.10}$$

zu zeigen.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \geq 1$ mit $|x_n - x_m| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Sei nun $n \geq n_\varepsilon$ fixiert. Da y_n die kleinste obere Schranke der Menge $\{x_m : m \geq n\}$ ist, gibt es ein $m \geq n$ mit

$$x_m > y_n - \varepsilon/3\,.$$

Da z_n die größte untere Schranke der Menge $\{x_m : m \geq n\}$ ist, gibt es ein $k \geq n$ mit

$$x_k < z_n + \varepsilon/3\,.$$

Damit folgt

$$0 \leq y_n - z_n \leq x_m + \frac{\varepsilon}{3} - x_k + \frac{\varepsilon}{3} \leq |x_m - x_k| + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon\,.$$

Dies ergibt $|y_n - z_n| < \varepsilon$ und damit haben wir (4.1.19) gezeigt.

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Der Satz 4.1.19 zeigt, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist. Analog zu Lemma 4.1.10 kann man mit Hilfe von Satz 4.1.19 dann auch zeigen, dass $\mathbb{R}^d$ bezüglich der Betragsmetrik vollständig ist, und das gleiche gilt auch für die Supremumsnorm und die 1-Norm. Im Fall $d = 2$ sehen wir zudem, dass $\mathbb{C}$ vollständig ist.

Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums sind im Allgemeinen *nicht* vollständig. Wir hatte dies schon für die Teilmenge $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ im Anschluss an Satz 4.1.6 gesehen.

Section 4.2
Konvergenz von Reihen

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann heißt die durch

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k\,, \qquad\qquad n \geq 1$$

definierte Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Folge der Partialsummen** oder auch **Reihe**. Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

und sprechen vom dem **Wert der Reihe**, oder oder auch nur von der **Reihe**.

In einigen Fällen betrachten wir auch z.B. Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Die Definition von

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

ist dann analog zu verstehen. Analoge Definitionen sind in allen normierten Räumen möglich.

Häufig kann der Grenzwert von Reihen leider nicht explizit berechnet werden. Die Konvergenz kann aber meistens nachgewiesen werden. Ein erstes Resultat in diese Richtung liefert der folgende Satz, dessen erster Teil als Cauchy-Kriterium bekannt ist.

Theorem 4.2.1

Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

i). *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n}^{m} x_k \right| < \varepsilon \,. \tag{4.2.1}$$

ii). *Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, so gilt $x_k \to 0$.*

iii). *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert genau dann, wenn der Reihenrest $\sum_{k=N}^{\infty} x_k$ konvergiert und in diesem Fall gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{N-1} x_k + \sum_{k=N}^{\infty} x_k \,.$$

i). Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ gilt:

$$|s_m - s_{n-1}| = \left|\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right|$$

Damit ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge genau dann, wenn (4.2.1) gilt. Die Implikation "$\Rightarrow$" folgt dann aus Satz 4.1.6 und die Implikation "$\Leftarrow$" aus Satz 4.1.19.

ii). Folgt aus *i)* durch Betrachtung von $n = m$.

iii). Für $n \geq N$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{N-1} x_k + \sum_{k=N}^{n} x_k\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt dann die Behauptung.

Für die Implikation "$\Leftarrow$" in *i)* wurde die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ benutzt. Diese Implikation gilt daher auch/nur in vollständigen normierten Räumen, während die anderen Implikation in allen normierten Räumen gelten. Insbesondere gilt der Satz ohne Einschränkung auch für Reihen in $\mathbb{C}$.

Der Teil *ii)* aus Satz 4.2.1 ist manchmal nützlich, um zu zeigen, dass eine Reihe *nicht* konvergiert.

Außerdem gelten die folgenden Rechenregeln für Reihen, die eine einfache Konsequenz aus Satz 4.1.7 sind.

Lemma 4.2.2

Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, deren Reihen konvergieren. Dann gilt:

i). *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$ konvergiert und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k\,.$$

ii). *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x_k)$ und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,.$$

Viele der Konvergenzkriterien für Reihen sind eine direkte Konsequenz des Cauchy-Kriteriums für die Konvergenz von reellen (oder komplexen) Zahlenfolgen. Eines der konzeptionell einfachsten dieser Kriterien ist das Leibniz-Kriterium, das wir allerdings, wie unten zu sehen ist, nicht über das Cauchy-Kriterium beweisen.

Theorem 4.2.3

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ *monoton fallend mit* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$*. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x_k\,.$$

Auf die Monotonie der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kann nicht verzichtet werden. Dies kann man z.B. an der durch $x_{2k} = \frac{1}{k}$ und $x_{2k-1} := 0$ definierten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Zusammenspiel mit der etwas später gezeigten Divergenz der harmonischen Reihe (4.2.2) leicht sehen.

BEWEIS

Wir betrachten die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_k \,.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $x_{2k+2} \leq x_{2k+1}$ und damit

$$s_{2(k+1)} = s_{2k} - x_{2k+1} + x_{2k+2} \leq s_{2k} \,.$$

Damit ist die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Analog zeigt man mit $s_{2k+1} = s_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k+1} \geq s_{2k-1}$, dass die Folge $(s_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

Mit dieser Monotonie von $(s_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $x_k \geq 0$ folgt nun

$$s_{2k} = s_{2k-1} + x_k \geq s_1 + x_k \geq s_1 = x_1$$

Damit ist die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, und somit konvergiert sie nach Satz 4.1.16 gegen ein $s^+ \in \mathbb{R}$. Analog zeigt man mit der Monotonie von $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $x_k \geq 0$:

$$s_{2k-1} = s_{2k} - x_k \leq s_{2k} \leq s_2 = x_1 - x_2 \,.$$

Damit ist die Folge $(s_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und nach Satz 4.1.16 gegen ein $s^- \in \mathbb{R}$.

Ferner gilt mit Satz 4.1.7

$$s^+ - s^- = \lim_{k\to\infty} s_{2k} - \lim_{k\to\infty} s_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} - s_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 0\,.$$

Wir schreiben daher $s := s^+ = s^-$ für den gemeinsamen Grenzwert.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_\varepsilon \geq 1$ mit

$$|s - s_{2k}| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |s - s_{2k-1}| < \varepsilon$$

für alle $k \geq k_\varepsilon$. Für $n_\varepsilon := 2k_\varepsilon$ und $n \geq n_\varepsilon$ erhalten wir dann $|s - s_n| < \varepsilon$ und damit konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen s.

Es gilt die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}\,,$$

wie man leicht durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}(z-1)\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} z^k &= \sum_{k=1}^{n+1} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^k \\ &= z^{n+1}-1\end{aligned}$$

zeigt. Wir bilden den Grenzwert für $n \to \infty$ und erhalten:

Lemma 4.2.4

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist konvergent für alle $|z| < 1$ und erfüllt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}\,.$$

Ebenso ist die geometrische Reihe für alle $|z| \geq 1$ divergent.

Für die harmonische Reihe gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,, \tag{4.2.2}$$

d.h. sie ist bestimmt divergent gegen ∞. Dazu schätzen wir bestimmte Partialsummen nach unten ab:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2^m} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{>\frac{1}{2}} \\ &> 1 + \frac{m}{2} \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

für $m \to \infty$. Da die Folge aller Partialsummen monoton wächst, folgt die gewünschte bestimmte Divergenz. Insbesondere impliziert die Konvergenz $x_k \to 0$ nicht die Konvergenz der zugehörigen Reihe!

Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \tag{4.2.3}$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium 4.2.3.

Die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

konvergieren. Dies hatten wir schon im Abschnitt 242 gesehen.

Die folgende Definition führt eine weitere Konvergenz von Reihen ein, die sich als wichtig herausstellen wird.

Definition 4.2.5

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann sagen wir, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ **absolut** konvergiert, falls die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

der Beträge konvergiert.

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut, so gibt es nach dem Cauchy-Kriterium, siehe Satz 4.2.1, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \geq 1$, so dass für $m \geq n \geq n_\varepsilon$ gilt

$$\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |x_k| < \varepsilon\,.$$

Erneutes Anwenden von Satz 4.2.1 zeigt dann, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ auch konvergiert.

Mit anderen Worten: **Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.** Die Umkehrung gilt nicht, wie man anhand der alternierenden harmonischen Reihe sehen kann.

Der folgende Satz ist als Majoranten-Kriterium bekannt.

Theorem 4.2.6

Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zwei reelle Folgen mit* $|x_k| \leq a_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*. Falls die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergiert, konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

absolut und es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,.$$

Der Satz gilt analog für Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\mathbb{C}$. Der Beweis ist analog zu führen.

BEWEIS

Wir setzen $a := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - a \right| < \varepsilon,$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Mit Teil *iii)* aus Satz 4.2.1 folgt für solche n:

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

Damit folgt aber für $m, n > n_\varepsilon$ die Abschätzung

$$\sum_{k=n+1}^{m} |x_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon\,,$$

da die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ monoton wachsend ist. Das Cauchy-Kriterium aus Satz 4.2.1 liefert dann die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Weiterhin gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} a_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

und für $n \to \infty$ folgen dann die beiden Ungleichungen

Um ein Beispiel zu betrachten, fixieren wir ein $\alpha \geq 2$. Dann gilt $k^{-\alpha} \leq k^{-2}$ für jedes $k \geq 1$ und damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

absolut nach dem Majoranten-Kriterium und der schon im Abschnitt 242 bewiesenen Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Dann heißt die zugehörige Reihe **unbedingt konvergent**, falls für jede Bijektion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die **umgeordnete Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$$

konvergiert. Man kann zeigen, dass in $\mathbb{R}$ eine Reihe genau dann absolut konvergent ist, falls sie unbedingt konvergent ist. Der folgende Satz liefert insbesondere die eine Richtung dieser Äquivalenz:

Theorem 4.2.7

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, deren Reihe absolut konvergiert. Dann konvergiert die Reihe auch unbedingt und für jede Bijektion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} \,. \tag{4.2.4}$$

Sei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $M := \max\{\pi(1), \ldots, \pi(n)\}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{\pi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{M} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

und damit folgt auch $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{\pi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$. Damit konvergiert die umgeordnete Reihe absolut und ihre Konvergenz folgt.

Anwenden der letzten Ungleichung auf die Inverse $\pi^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{\pi^{-1} \circ \pi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_{\pi(k)}| \, ,$$

so dass wir insgesamt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{\pi(k)}| \tag{4.2.5}$$

gezeigt haben.

BEWEIS

Um (4.2.4) zu zeigen, definieren wir jetzt

$$x_k^+ := \max\{x_k, 0\}\,,$$
$$x_k^- := -\min\{x_k, 0\}\,.$$

Dies ergibt $x_k^\pm \geq 0$, und die Zerlegungen $x_k = x_k^+ - x_k^-$ und $|x_k| = x_k^+ + x_k^-$.

Nach dem Majoranten-Kriterium mit $a_k := |x_k|$ konvergieren dann die Reihen $\sum_{k=1}^\infty x_k^+$ und $\sum_{k=1}^\infty x_k^-$ absolut und wegen $|x_k^\pm| = x_k^\pm$ liefert doppeltes Anwenden unsere Vorüberlegung (4.2.5):

$$\sum_{k=1}^\infty x_{\pi(k)}^+ - \sum_{k=1}^\infty x_{\pi(k)}^- = \sum_{k=1}^\infty x_k^+ - \sum_{k=1}^\infty x_k^-\,.$$

Ferner gilt

$$\sum_{k=1}^\infty x_{\pi(k)} = \sum_{k=1}^\infty (x_{\pi(k)}^+ - x_{\pi(k)}^-) = \sum_{k=1}^\infty x_{\pi(k)}^+ - \sum_{k=1}^\infty x_{\pi(k)}^-$$

und eine analoge Rechnung liefert $\sum_{k=1}^\infty x_k = \sum_{k=1}^\infty x_k^+ - \sum_{k=1}^\infty x_k^-$.

Falls eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ allerdings *nicht* unbedingt konvergiert, zeigt der **Riemann'sche Umordnungssatz**, dass für jedes $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine Bijektion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, so dass die umgeordnete Reihe gegen x konvergiert, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} = x\,.$$

Mit anderen Worten: **Das Umordnen von Reihen nur für absolut konvergente Reihen ungefährlich**.

Absolute Konvergenz kann man auch in normierten Räumen definieren, indem man Beträge durch Normen ersetzt. In vollständigen, normierten Räumen ist dann jede absolut konvergente Reihe auch unbedingt konvergent, die Umkehrung gilt allerdings nur noch im Falle endlicher Dimension des Raums, wie aus dem **Satz von Dvoretzky-Rogers** folgt.

Typische Vergleichsreihen für das Majoranten-Kriterium sind geometrische Reihen, siehe Lemma 4.2.4. Mit diesen erhalten wir zwei oft nutzbare Konvergenzkriterien. Das erste ist als Quotienten-Kriterium bekannt.

Theorem 4.2.8

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge mit* $x_k \neq 0$ *für alle* $k \geq 1$. *Gilt dann*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < 1\,,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *absolut. Gilt andererseits*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} > 1\,,$$

so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Der Satz gilt analog für Reihen in $\mathbb{C}$. Der Beweis ist ebenfalls analog zu führen.

Wir zeigen zunächst die erste Aussage. Sei dazu $\tilde{q} := \limsup_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}$. Wir schreiben $q := \frac{\tilde{q}+1}{2}$ und $\varepsilon := q - \tilde{q}$. Dies ergibt $q \in (\tilde{q}, 1)$ und $\varepsilon > 0$. Damit gibt es ein $n_\varepsilon \geq 1$ mit

$$\sup_{k\geq n} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \leq \tilde{q} + \varepsilon = q < 1$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Mit Induktion ergibt dies

$$|x_{n_\varepsilon + k}| \leq |x_{n_\varepsilon}| \cdot q^k =: a_k$$

für alle $k \geq 1$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ nach Lemma 4.2.4 konvergiert, folgt nach Satz 4.2.6 die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=n_\varepsilon}^\infty x_k$. Dies impliziert die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$, siehe Satz 4.2.1.

Für die zweite Aussage nutzen wir entsprechend, dass $q > 1$ und $n_\varepsilon \geq 1$ existieren mit

$$\inf_{k \geq n} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \geq q$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Mit Induktion erhalten wir dann

$$|x_{n_\varepsilon + k}| \geq |x_{n_\varepsilon}| \cdot q^k$$

für alle $k \geq 1$. Wegen $x_{n_\varepsilon} \neq 0$ ist daher $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge und Satz 4.2.1 ergibt die Divergenz.

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{4.2.6}$$

konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. Für $z = 0$ ist dabei nichts zu zeigen, und für alle anderen $z \in \mathbb{C}$ nutzen wir das Quotienten-Kriterium: Es gilt

$$\frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1} \to 0$$

für $k \to \infty$ und damit gilt dies auch für den Limes Superior, siehe Lemma 4.1.18. Die absolute Konvergenz der Reihe folgt dann aus dem Quotienten-Kriterium.

Das zweite Kriterium, das im folgenden Satz vorgestellt wird, ist als **Wurzel-Kriterium** bekannt. Auch diese Kriterium ist nur für $\mathbb{R}$ formuliert, es gilt aber ohne Einschränkung auch in $\mathbb{C}$.

Theorem 4.2.9

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Gilt dann

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x_k|} < 1\,,$$

so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut. Gilt andererseits

$$\liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x_k|} > 1$$

so divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Wir zeigen wiederum zuerst die erste Aussage. Nach Voraussetzung existiert ein $n_\varepsilon \geq 1$ und ein $q < 1$ mit

$$\sqrt[k]{|x_k|} \leq q$$

für alle $k \geq n_\varepsilon$. Damit folgt aber direkt $|x_k| \leq q^k$ für alle $k \geq n_\varepsilon$. Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe folgt dann die absolute Konvergenz von $\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} x_k$ mit Hilfe des Majoranten-Kriteriums.

Für die zweite Aussage nutzen wir entsprechend, dass $n_\varepsilon \geq 1$ und $q > 1$ existieren, so dass $\sqrt[k]{|x_k|} \geq q$ für alle $k \geq n_\varepsilon$ gilt. Damit folgt $|x_k| \geq q^k$ für alle $k \geq n_\varepsilon$ und die Reihenglieder bilden keine Nullfolge. Also folgt die Divergenz.

BEISPIEL

Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^k$$

genau dann, wenn $|z| < 1$. Dazu bemerken wir zunächst, dass Lemma 4.1.11

$$\sqrt[k]{k|z|^k} = |z|\sqrt[k]{k} \to |z|, \qquad\qquad k \to \infty$$

liefert. Das Wurzel-Kriterium ergibt Konvergenz für $|z| < 1$ und Divergenz für $|z| > 1$. Für $|z| = 1$ liefert das Kriterium keine Aussage, jedoch sieht man den Reihengliedern direkt an, dass diese auch hier keine Nullfolge bilden.

Wir hatten in Kapitel 2 die Größe von endlichen Mengen beschrieben. Insbesondere haben wir dort definiert, dass eine Menge A unendlich ist, falls es eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt.

Im folgenden heißt eine unendliche Menge A **abzählbar**, falls es eine Bijektion $\mathbb{N} \to A$ gibt, ansonsten heißt sie **überabzählbar**. Schließlich heißt eine Menge **höchstens abzählbar**, falls A entweder endlich, oder abzählbar ist.

Offensichtlich ist $\mathbb{N}$ abzählbar, und es ist auch $\mathbb{Z}$ abzählbar, denn wir können die z.B. Bijektion

$$n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1 \\ k & \text{falls } n = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N} \\ -k & \text{falls } n = 2k+1 \text{ für } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

betrachten.

Man kann zeigen, dass jede Teilmenge einer höchstens abzählbaren Menge wieder höchstens abzählbar ist. Zusammen mit dem folgenden Satz zeigt dies, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Theorem 4.2.10

Seien A und B abzählbare Mengen. Dann ist $A \times B$ abzählbar.

Beweis.

In Abbildung 13 ist eine Bijektion $\mathbb{N} \to A \times B$ skizziert. Dabei werden die Bijektionen $\mathbb{N} \to A$ mit $i \mapsto a_i$ und $\mathbb{N} \to B$ mit $j \mapsto b_j$ bezeichnet. $\square$

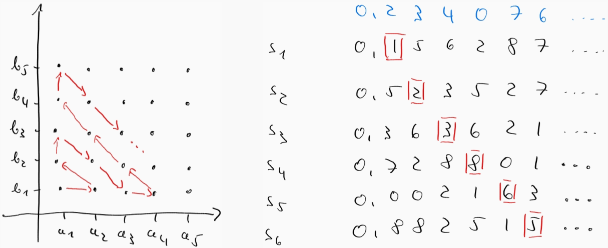


Abbildung: Links: Konstruktion einer Bijektion $\mathbb{N} \to A \times B$. Die 1 wird auf (a_1, b_1) abgebildet, danach werden die Tupel (a_i, b_j) gemäß der roten Pfeilrichtungen abgezählt, d.h. wir betrachten die Abbildung $\mathbb{N} \to A \times B$ mit $2 \mapsto (a_2, b_1)$, $3 \mapsto (a_1, b_2)$, $4 \mapsto (a_1, b_3)$ usw.. **Rechts**: Beweisidee von Satz 4.2.11. Die Zahlen $s_1, s_2, \ldots$ werden in ihrer Dezimaldarstellung untereinander aufgeschrieben. Dann wird die n-Ziffer z_n der n-ten Zahl s_i verändert. Beispielsweise wird die Ziffer um 1 erhöht, falls sie kleiner als 8 ist und ansonsten auf 0 gesetzt. Dies ergibt die blaue Zahl in der obersten Reihe. Diese kann nicht in der Menge $\{s_n : n \geq 1\}$ enthalten sein, weil sie sich nach Konstruktion von jeder dieser Zahlen an mindestens einer Nachkomma-Stelle unterscheidet.

Die rationalen Zahlen hatten wir mit Hilfe des Supremums-Axioms zu den reellen Zahlen aufgefüllt, wobei es unser Ziel war, die “Lücken” zu schließen. Waren es wenige Lücken, d.h. sind die reellen Zahlen auch abzählbar?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir Reihen der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot 10^{-k}\,, \tag{4.2.7}$$

wobei $z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Setzen wir $a_k := 9 \cdot 10^{-k}$, so erhalten wir $z_k \cdot 10^{-k} \leq a_k$ für alle $k \geq 1$ und das Majoranten-Kriterium ergibt

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\left(\frac{1}{1 - 1/10} - 1\right) = 1\,.$$

Mit anderen Worten hat jede dieser Reihen einen Wert zwischen 0 und 1, und man kann sogar zeigen, dass sich jede reelle Zahl in $[0, 1]$ auf diese Weise darstellen lässt.

Theorem 4.2.11
Das Intervall $[0, 1]$ *und* $\mathbb{R}$ *sind nicht abzählbar.*

Beweis.
Wir betrachten die Menge M aller Zahlen der Form (4.2.7), wobei wir nur die "Ziffern" $z_k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$ zulassen. Dies sichert die Eindeutigkeit der Darstellung jeder Zahl in M, den Beweis hiervon lassen wir aber aus.
Wenn $\mathbb{R}$ abzählbar wäre, wäre $[0, 1]$ abzählbar und damit auch M. Wir nehmen dann eine beliebige Abbildung $\mathbb{N} \to M$ mit $n \mapsto s_n$. In Abbildung 13 ist dann illustriert, warum diese Abbildung nicht surjektiv ist. $\square$

CHAPTER 5: STETIGE FUNKTIONEN

Section 5.1
Stetigkeit

Funktionen, bei denen ähnliche Eingabewerte zu ähnlichen Ausgabewerten führen, werden stetig genannt. Die folgende Definition führt diesen intuitiven Ansatz mathematische präzise ein:

Definition 5.1.1

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) zwei metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$. Dann heißt f **stetig in x_0**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \mathrm{d}_1(x, x_0) < \delta \implies \mathrm{d}_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \,.$$

Ist f in allen Punkten x_0 stetig, so heißt f **stetig**.

Ist $X \subset Y$ und stimmen die beiden Metriken d_1 und d_2 auf X überein, so ist die Inklusionsabbildung $\mathrm{id}_{X,Y} : X \to Y$ stetig, denn wir können zu jedem $\varepsilon > 0$ einfach $\delta := \varepsilon$ wählen.

Ist $f : X \to Y$ eine konstante Funktion, d.h. es gibt ein $y_0 \in Y$ mit $f(x) = y_0$ für alle $x \in X$, so ist f stetig, denn wir können zu jedem $\varepsilon > 0$ ein beliebiges, von ε unabhängiges $\delta > 0$ wählen.

Für $A \subset \mathbb{R}$ ist $\mathbf{1}_A$ i.A. nicht stetig. Für $A := [0, \infty)$ ist z.B. $x := 0$ eine Unstetigkeitsstelle. Für $A := \mathbb{Q}$ ist die Funktion $\mathbf{1}_A$ in *keinem* Punkt stetig!

Die Stetigkeit kann auch mit Hilfe von Folgen ausgedrückt werden. Dies ist der Inhalt des folgendes Satzes:

Theorem 5.1.2

Seien (X, d_1) *und* (Y, d_2) *zwei metrische Räume,* $f : X \to Y$ *eine Abbildung und* $x_0 \in X$*. Dann sind äquivalent:*

i). f *ist stetig in* x_0*.*

ii). f *ist* ***folgenstetig in*** x_0*, d.h. für alle Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *mit* $x_n \to x_0$ *gilt* $f(x_n) \to f(x_0)$*.*

Ist f stetig, so lässt sich die Aussage des Satzes 5.1.2 informell auf die Formel

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bringen. Mit anderen Worten: **Die Stetigkeit erlaubt es, Grenzwert-Bildung und Funktions-Anwendung zu vertauschen**.

Entsprechend eingeschränktere Aussagen gelten natürlich auch für die Stetigkeit in einem Punkt x_0.

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Sei $\varepsilon > 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $x_n \to x_0$. Da f stetig in x_0 ist, gibt es dann ein $\delta > 0$ mit

$$\mathsf{d}_1(x, x_0) < \delta \implies \mathsf{d}_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$. Wegen $x_n \to x_0$ gibt es dann ein $n^* \geq 1$ mit $\mathsf{d}_1(x_n, x_0) < \delta$ für alle $n \geq n^*$. Damit haben wir also $\mathsf{d}_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $n \geq n^*$, d.h. wir haben $f(x_n) \to f(x_0)$ gezeigt.

ii) $\Rightarrow$ *i)*. Hier zeigen wir die äquivalente Aussage $\neg$*i)* $\Rightarrow$ $\neg$*ii)*.
Dementsprechend ist f nicht in x_0 stetig und damit ist die folgende Aussage wahr:

$$\exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 \exists x \in X : \mathsf{d}_1(x, x_0) < \delta \wedge \mathsf{d}_2\big(f(x), f(x_0)\big) \geq \varepsilon\,.$$

Wir fixieren dieses ε. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann zu $\delta_n := 1/n$ ein $x_n \in X$ mit $\mathsf{d}_1(x_n, x_0) < \delta_n$ und $\mathsf{d}_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$.

Wegen $\delta_n \to 0$ sichert unsere Konstruktion $\mathsf{d}_1(x_n, x_0) \to 0$ nach dem Vergleichskriterium, siehe Satz 4.1.9, d.h. $x_n \to x$. Andererseits gilt aber auch $\mathsf{d}_2\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$ für alle $n \geq 1$, und damit kann $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren. Damit ist f nicht folgenstetig in x_0.

Die Kombination der Sätze 5.1.2 und 4.1.7 liefert sofort das folgende Korollar:

Korollar 5.1.3

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in X$ stetig sind und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ und $f \cdot g$ in x_0 stetig.

Das obige Korollar zeigt insbesondere, dass die Menge

$$\mathcal{C}(X, \mathrm{d}) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \right\}$$

ein Vektorraum ist. Da wir ferner schon wissen, dass die Abbildungen $x \mapsto a$ und $x \mapsto x$ als Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind, sind alle reellen Polynome ebenfalls stetig. Die gleiche Aussage gilt für komplexe Polynome.

Die Kombination der Sätze 5.1.2 und 4.1.7 liefert zudem das folgende Korollar:

Korollar 5.1.4

Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) *und* (X_3, d_3) *metrische Räume, sowie* $f : X_1 \to X_2$ *und* $g : X_2 \to X_3$. *Ist dann* f *in* x_0 *stetig und* g *in* $y_0 := f(x_0)$ *stetig, so ist* $g \circ f : X_1 \to X_3$ *in* x_0 *stetig.*

Laut Definition ist eine Funktion $X \to Y$ stetig, falls die folgende Aussage wahr ist:

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in X : \mathbf{d}_1(x, x') < \delta \implies \mathbf{d}_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon\,.$$

Damit hängt δ potentiell sowohl von x als auch von ε ab. Die folgenden Definitionen heben die Abhängigkeit von x auf und spezifizieren die Abhängigkeit von ε genauer.

Definition 5.1.5

Seien $(X, \mathbf{d}_1)$ und $(Y, \mathbf{d}_2)$ zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\alpha \in (0, 1]$. Dann heißt f:

i). **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X : \mathbf{d}_1(x, x') < \delta \implies \mathbf{d}_2\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon\,.$$

ii). **α-Hölder-stetig**, falls es eine Konstante $c \geq 0$ gibt, so dass für alle $x, x' \in X$ gilt:

$$\mathbf{d}_2\big(f(x), f(x')\big) \leq c\, \mathbf{d}_1^\alpha(x, x')\,.$$

iii). **Lipschitz-stetig**, falls f 1-Hölder-stetig ist.

Ist eine Funktion α-Hölder-stetig, so ist sie auch gleichmäßig stetig, denn definieren wir für $\varepsilon > 0$ die Größe $\delta_\varepsilon > 0$ durch $c\delta_\varepsilon^\alpha := \varepsilon$, so gilt für $x, x' \in X$ mit $\mathsf{d}_1(x, x') < \delta_\varepsilon$ die Abschätzung

$$\mathsf{d}_2\big(f(x), f(x')\big) \leq c\,\mathsf{d}_1^\alpha(x, x') < c\delta_\varepsilon^\alpha = \varepsilon$$

Es gibt aber gleichmäßig stetige Funktionen, die nicht Hölder-stetig sind. Als Beispiel kann die Funktion $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := 0$ und $f(x) := -1/\ln(x)$ für $x \in (0, 1/2]$ dienen. Einen Beweis überspringen wir.

Ist eine Funktion gleichmäßig stetig, so ist sie offensichtlich auch stetig. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, wie z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ zeigt. Wir werden später aber noch sehen, dass für stetige Funktionen, die auf abgeschlossenen Intervallen definiert sind, die Umkehrung gilt.

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist die Norm $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ Lipschitz-stetig, denn für $x, x' \in V$ zeigt ja die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\big|\|x\| - \|x'\|\big| \leq \|x - x'\|\,.$$

Seien (X, d_1) und (Y, d_2) zwei metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$. Konvergiert dann für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n \neq x_0$ für alle $n \geq 1$ die Folge $(f(x_n))_{n\geq 1}$ gegen ein und dasselbe $y_0 \in Y$, so schreiben wir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \,.$$

Äquivalent dazu ist die Aussage

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} : \, f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\,.$$

Der Beweis, der analog zu dem von 5.1.2 zu führen ist, wird übersprungen. Man beachte, dass i.A. nicht $y_0 = f(x_0)$ gelten muss. Genauer gesagt ist

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

äquivalent zur Stetigkeit von f in x_0.

In $\mathbb{R}$ können wir diese Definitionen noch etwas verfeinern. Sei dazu z.B. $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, so dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b)$ mit $x_n \to b$ gilt $f(x_n) \to y$, so ist der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = y\,.$$

Analog definieren wir den rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x\to a^+} f(x) = y$ für Funktionen $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. Die gleichen Notationen werden auch für Punkte x_0 im Definitionsbereich von f verwendet, wenn nur eine einseitige Approximation von x_0 erlaubt sein soll. Es gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y$$

genau dann, wenn die links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren und $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

Section 5.2
Hauptsätze über stetige Funktionen

Im folgenden wollen wir den Wertebereich von stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ untersuchen. Wir beginnen mit dem sogenannten Nullstellensatz von Bolzano.

Theorem 5.2.1
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$f(a) < 0 < f(b)\,.$$

Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Wir betrachten einen Beweis, der auch als Grundlage für einen Algorithmus zur Nullstellensuche dienen kann. Dazu definieren wir zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv wie folgt: Für $n = 1$ setzen wir $a_1 := a$ und $b_1 := b$. Es gilt dann offensichtlich $f(a_1) < 0$ und $f(b_1) > 0$.

Haben wir die beiden Folgen für $n \geq 1$ schon definiert, so betrachten wir zunächst den Mittelpunkt $c_n := (a_n + b_n)/2$ des aktuellen Intervalls $[a_n, b_n]$. Gilt $f(c_n) = 0$, so haben wir eine Nullstelle gefunden, und eine weitere Konstruktion erübrigt sich. Im Fall $f(c_n) < 0$ setzen wir

$$a_{n+1} := c_n \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} := b_n$$

und im Fall $f(c) > 0$ setzen wir

$$a_{n+1} := a_n \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} := c_n \,.$$

Da der Mittelpunkt c_n immer $a_n \leq c_n \leq b_n$ erfüllt, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Beide Folgen sind außerdem beschränkt, da sie im Intervall $[a, b]$ liegen, siehe auch Abbildung 14. Nach Satz 4.1.16 konvergieren daher beide Folgen. Ferner gilt

$$b_n - a_n = (b - a) \cdot 2^{n-1}\,, \qquad\qquad n \geq 1\,,$$

wie eine einfache Induktion zeigt. Damit folgt $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ und mit Satz 4.1.7 schließen wir $x_0 := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Offensichtlich gilt $x_0 \in [a, b]$. Ferner sichert unsere Konstruktion sowohl $f(a_n) < 0$ als auch $f(b_n) > 0$ für alle $n \geq 1$. Mit der Folgen-Stetigkeit und Satz 4.1.7 erhalten wir daher $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ und damit $f(x_0) = 0$. Dies schließt $x_0 = a$ und $x_0 = b$ aus.

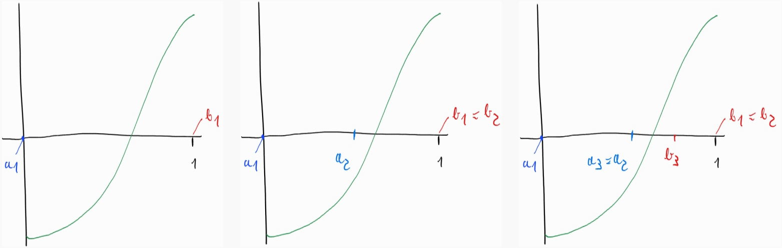


Abbildung: Beweis von Satz 5.2.1 mit Intervall-Halbierung für die grüne Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. **Links:** Das Anfangsintervall mit $a_1 := a = 0$ und $b_1 := b = 1$. **Mitte:** Die erste Intervall-Halbierung: Es wird $f(c_1)$ für den Mittelpunkt des aktuellen Intervalls $c_1 := (a_1 + b_1)/2$ betrachtet. Da $f(c_1) < 0$ ist, wird $a_2 := c_1$ und $b_2 := b_1$ gesetzt. **Rechts:** Die nächste Intervall-Halbierung: Es wird $f(c_2)$ für den Mittelpunkt des aktuellen Intervalls $c_2 := (a_2 + b_2)/2$ betrachtet. Da $f(c_2) > 0$ ist, wird diesmal $a_3 := a_2$ und $b_3 := c_2$ gesetzt.

Mit Hilfe des Nullstellensatzes können wir nun den folgenden **Zwischenwertsatz** einfach beweisen.

Theorem 5.2.2

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und seien*

$$y_* := \min\{f(a), f(b)\} \qquad \textit{und} \qquad y^* := \max\{f(a), f(b)\}\,.$$

Dann gibt es zu jedem $y \in (y_*, y^*)$ *ein* $x \in (a, b)$ *mit* $f(x) = y$*.*

Sei $y \in (y_*, y^*)$. Im Fall $f(a) < f(b)$ erfüllt die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, die durch $g(x) := f(x) - y$ definiert ist, sowohl

$$g(a) = f(a) - y = y_* - y < 0$$

als auch $g(b) = f(b) - y = y^* - y > 0$. Da g auch stetig ist, gibt es nach Satz 5.2.1 ein $x \in (a, b)$ mit $g(x) = 0$. Dies ergibt $f(x) = y$.

Im Fall $f(a) < f(b)$ betrachtet man stattdessen die durch $h(x) := y - f(x)$ definierte Funktion und wiederholt die Argumentation.

Um weitere Eigenschaften von stetigen Funktionen herzuleiten, ist der Begriff von Teilfolgen sehr nützlich. Konzeptionell passt dieser eher ins Kapitel 4.

Definition 5.2.3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ eine streng wachsende Folge. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Jede Folge ist Teilfolge von sich, es gibt aber natürlich auch "echte" Teilfolgen: Für die durch $a_n := (-1)^n$ definierte Folge ist beispielsweise $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine echte Teilfolge. Schließlich ist jede Teilfolge einer Teilfolge auch eine Teilfolge der ursprünglichen Folge.

Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein a, so konvergiert auch jede Teilfolge von ihr gegen a, wie ein einfaches Anwenden der Definitionen zeigt. Haben wir umgekehrt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die jede Teilfolge konvergiert, so ist die Folge selber schon konvergent, da sie ja eine Teilfolge von sich selbst ist.

Für reelle Folgen können wir Teilfolgen mit zusätzlichen Eigenschaften konstruieren. Dies ist das Ergebnis der folgenden beiden Sätze:

Theorem 5.2.4

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge. Dann existiert eine monotone Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BEWEIS

Ein Folgenglied a_m heißt Gipfelstelle, falls $a_m \geq a_n$ für alle $n > m$ gilt.

Falls es unendlich viele verschiedene Gipfelstellen a_{n_k} gibt, können wir durch sukzessives Wählen der kleinsten verbleibenden Indizes n_k die Sortierung $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ herstellen. Die resultierende Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann monoton fallend.

Falls es nicht unendlich viele Gipfelstellen gibt, gibt es ein n_1, so dass a_m für alle $m \geq n_1$ keine Spitze ist. Da a_{n_1} keine Gipfelstelle ist, gibt es ein $n_2 > n_1$ mit $a_{n_1} < a_{n_2}$. Da a_{n_2} auch keine Gipfelstelle ist, gibt es ein $n_3 > n_2$ mit $a_{n_2} < a_{n_3}$. Rekursiv erhalten wir somit eine monoton wachsende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Der folgende Satz ist als **Satz von Bolzano-Weierstraß** bekannt.

Theorem 5.2.5

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle und beschränkte Folge. Dann existiert eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis.

Nach Satz 5.2.4 existiert eine monotone Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese ist ebenfalls beschränkt, und damit konvergent nach Satz 4.1.16. □

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **folgenkompakt**, falls es zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ein $x \in X$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit $x_{n_k} \to x$.

Satz 5.2.5 zeigt, dass die Intervalle $[a, b]$ folgenkompakt sind, da jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem solchen Intervall beschränkt ist und Grenzwerte x von konvergenten Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ wegen Satz 4.1.7 die Ungleichungen $a \leq x \leq b$ erfüllen müssen.

Durch sukzessives, komponentenweises Anwenden der obigen Argumentation kann man zeigen, dass z.B. auch Megen der Form $[-a, a]^d$ oder $B(0, r)$ folgenkompakt sind. Offene, nichtleere Intervalle sind dagegen *nie* folgenkompakt.

Die folgende Definition beschreibt das Verhalten bestimmter reeller Funktionen.

Definition 5.2.6

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt:

i). **monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)\,.$$

Entsprechend sagen wir sie sei **monoton fallend**, falls

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,.$$

ii). **streng monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,.$$

Entsprechend sagen wir sie sei **streng monoton fallend**, falls

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,.$$

Konstante Funktionen sind sowohl monoton wachsend als auch fallend, aber weder streng wachsend noch streng fallend. Die Funktion $x \mapsto x$ ist auf jedem Intervall $[a, b]$ streng wachsend, und die Funktion $x \mapsto x^2$ ist auf $[-1, 1]$ weder wachsend noch fallend.

Ist f (streng) wachsend, so ist $-f$ (streng) fallend, und umgekehrt. Ferner sind streng monotone Funktionen automatisch injektiv.

Der folgende **Umkehrsatz** zeigt, dass streng monotone, stetige Funktionen eine *stetige* Umkehrfunktion besitzen.

Theorem 5.2.7

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig. Dann existiert zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ genau ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Insbesondere existiert damit die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(y) := x$$

auf $[f(a), f(b)]$. Diese ist streng monoton wachsend und stetig.

Da $f(a) < f(b)$ ist, ist die Existenz von $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$ nach dem Zwischenwertsatz 5.2.2 gesichert. Die Eindeutigkeit von x folgt aus der Injektivität von f. Also folgt die Existenz der Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]\,.$$

Um die strenge Monotonie von f^{-1} zu überprüfen, wählen wir $y_1 < y_2$. Wäre dann $x_1 := f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) =: x_2$, so würde $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ folgen. Also ist f^{-1} streng wachsend.

Gäbe es nun ein $y \in [f(a), f(b)]$, so dass f^{-1} nicht stetig in y wäre, so finden wir eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \to y$ und $f^{-1}(y_n) \not\to f^{-1}(y)$. Damit gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ mit

$$\left|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y)\right| > \varepsilon \tag{5.2.1}$$

für alle $k \geq 1$. Mit Satz 5.2.4 können wir zusätzlich annehmen, dass diese Teilfolge monoton ist. Wir setzen $x_k := f^{-1}(y_{n_k})$. Da f^{-1} wachsend ist, ist dann auch die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton, und da sie auch beschränkt ist, konvergiert sie gegen ein $x \in [a, b]$. Damit gilt aber mit der Stetigkeit von f

$$y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\lim_{k\to\infty} x_k) = f(x)$$

und somit

$$f^{-1}(y) = x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} f^{-1}(y_{n_k})\,.$$

Dies widerspricht (5.2.1).

Für $x \geq 0$ ist die Funktion $f(x) := x^2$ streng monoton wachsend und stetig. Monotonie folgt dabei direkt aus

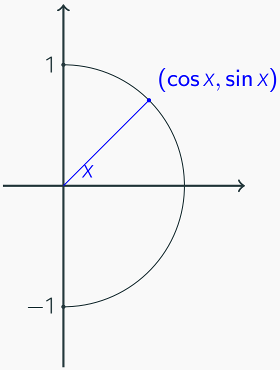
$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0\,.$$

Damit existiert auf jedem Intervall $[0, b^2]$ die durch $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ gegebene Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, b^2] \to [0, b]$$

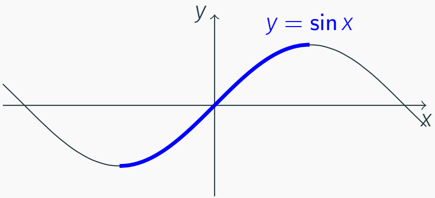
und diese ist auch stetig. Da b beliebig war, ist auch die **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig.

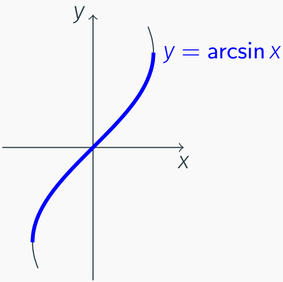
Auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Funktion $f(x) = \sin x$ stetig und streng monoton wachsend, wie die folgende Zeichnung illustriert:



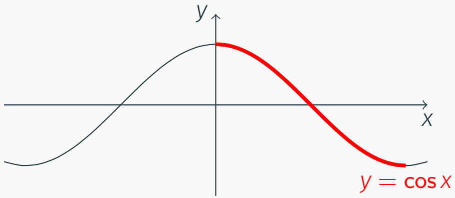
Damit existiert die als **Arkussinus** bezeichnete, streng monotone und stetige Umkehrfunktion

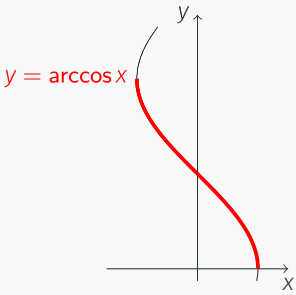
$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] .$$


y
$y = \sin x$
x


y
$y = \arcsin x$
x

Entsprechend ist $\cos : [0, \pi]$ streng monoton fallend und damit existiert die stetig und monoton fallende Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, die als Arkuskosinus bezeichnet wird.





Der folgende Satz zeigt, das stetige Funktionen auf abgeschlossenen, beschränkten Intervallen beschränkt sind und Maximum und Minimum annehmen.

Theorem 5.2.8

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann existieren Punkte* $x_*, x^* \in [a, b]$ *mit*

$$f(x_*) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

und

$$f(x^*) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} .$$

Insbesondere ist f *beschränkt und es werden das Minimum und Maximum der Funktionswerte angenommen.*

Aus dem Beweis des Satzes 5.2.8 wird schnell ersichtlich, dass er für stetige Funktionen, die auf folgenkompakten Räumen definiert sind, ebenfalls gilt.

Für die Existenz von x^* setzen wir $W := \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und $M := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Da für $n \geq 1$ nach Definition $M - 1/n$ keine obere Schranke von W ist, gibt es ein $x_n \in [a,b]$ mit

$$M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M.$$

Dies ergibt $f(x_n) \to M$. Ferner ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und damit gibt es nach Satz 5.2.5 eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x^* \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wegen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ gilt zudem $x^* \in [a,b]$. Dies ergibt

$$M = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)\,.$$

Die Existenz von x_* folgt durch die Betrachtung von $-f$.

Im Folgenden schreiben wir

$$\mathcal{C}([a,b]) := \left\{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\right\}.$$

Wir wissen schon, dass dies ein Vektorraum ist. Ferner ist nach Satz 5.2.8

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty$$

für alle $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Eine einfache Rechnung zeigt zudem, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{C}([a,b])$ definiert. Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b])$ bezüglich dieser Norm, so sprechen wir von **gleichmäßiger Konvergenz**.

Der folgende Satz untersucht die gleichmäßige Konvergenz.

Theorem 5.2.9

Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b])$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Dann gilt $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur **punktweise**, d.h. $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist die Grenzwertfunktion im Allgemeinen *nicht* stetig.

Dies kann man an dem Beispiel $f_n(x) := x^n$ für $x \in [0, 1]$ sehen, da in diesem Fall $f = \mathbf{1}_{\{1\}}$ gilt, siehe Lemma 4.1.13.

Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ eine Folge mit $x_k \to x$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Satz 5.2.9, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_k)$$

Man darf also in diesem Fall die Grenzwertbildungen vertauschen. Wenn man $x := 1$ und $x_k := 1 - 1/k$ im obigen Beispiel wählt, so sehen wir, dass diese Vertauschung bei punktweiser Konvergenz im Allgemeinen nicht möglich ist.

Aus dem Beweis des Satzes 5.2.9 wird wieder schnell ersichtlich, dass er für stetige Funktionen, die auf folgenkompakten Räumen definiert sind, ebenfalls gilt.

Sei $x_0 \in [a,b]$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \geq 1$ mit

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Da f_n stetig in x_0 ist, gibt es zudem ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Abschätzung

$$\big|f_n(x) - f_n(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Für solche x folgt dann

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &\leq \big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - f_n(x_0)\big| + \big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| \\ &< \varepsilon\,,\end{aligned}$$

und damit ist f stetig.

Wir hatten schon gesehen, dass gleichmäßig stetige Funktionen stetig sind, die Umkehrung im Allgemeinen aber falsch ist. Der folgende Satz liefert daher eine bemerkenswerte Aussage.

Theorem 5.2.10

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig wäre. Nach der Definition von gleichmäßiger Stetigkeit gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $n \geq 1$ Punkte $x_n, z_n \in [a, b]$ gibt mit

$$|x_n - z_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad |f(x_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon\,.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, siehe Satz 5.2.5, gibt es dann ein $x \in [a, b]$ und eine Teilfolge $x_{n_k} \to x$. Wendet man das gleiche Argument auf die Folge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ an, so erhalten wir eine Teilfolge $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $z \in [a, b]$ konvergiert. Für die Teilfolge $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt dann $x_{m_k} \to x$ und wegen

$$|x_{m_k} - z_{m_k}| < \frac{1}{m_k}$$

gilt außerdem $x = z$.

Da f stetig ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(z_{m_k})\,.$$

Damit gibt es ein $k_0 \geq 1$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt

$$|f(x_{m_k}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad |f(z_{m_k}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dies ergibt

$$|f(x_{m_k}) - f(z_{m_k})| \leq |f(x_{m_k}) - f(x)| + |f(x) - f(z_{m_k})| < \varepsilon\,,$$

was im Widerspruch zu dem obigen $|f(x_{m_k}) - f(z_{m_k})| \geq \varepsilon$ für alle $k \geq 1$ steht.

Section 5.3
Exponentialfunktion

Wir hatten in (4.1.3) die Euler'sche Zahl durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ definiert, und in (4.2.6) hatten wir gesehen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert. Diese Einsichten wollen wir jetzt nutzen, um die Exponentialfunktion als Reihe zu definieren.

Definition 5.3.1

Die **komplexe Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist durch

$$\exp(z) := \mathrm{e}^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

definiert.

Betrachtet man die Exponentialfunktion nur für reelle Argumente $x \in \mathbb{R}$, so ergibt die Reihendarstellung sofort $\exp(x) \in \mathbb{R}$. Die resultierende Einschränkung $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird **reelle Exponentialfunktion** genannt.

Einsetzen von $z = 0$ und $z = 1$ in die Reihendarstellung der Exponentialfunktion ergibt

$$\exp(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \exp(1) = \mathrm{e}\,,$$

wobei für die zweite Formel die Definition (4.1.3) ausgenutzt wurde. Die folgende Proposition präsentiert zwei wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Proposition 5.3.2

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig mit*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)\,, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur den reellen Fall. Der komplexe Fall ist aber wegen diverser Bemerkungen zu absoluter Konvergenz und Folgenkompaktheit im Skript komplett analog beweisbar.

Um die Stetigkeit in einem $x \in \mathbb{R}$ zu beweisen, setzen wir $a := |x| + 1$. Für $n \geq 1$ definieren wir weiter

$$f_n(y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}\,, \qquad\qquad y \in [-a, a]\,.$$

Offensichtlich ist jede Funktion $f_n : [-a, a] \to \mathbb{R}$ stetig und ferner gilt

$$\|\exp_{|[-a,a]} - f_n\|_\infty = \sup_{y\in[-a,a]} \left|\exp(y) - f_n(y)\right| = \sup_{y\in[-a,a]} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

wobei wir nacheinander die Sätze 4.2.1 und 4.2.6 angewendet haben. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ nach (4.2.6) konvergiert, zeigt Satz 4.2.1

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = 0$$

und damit haben wir $\|\exp_{|[-a,a]} - f_n\|_\infty \to 0$ gezeigt. Satz 5.2.9 liefert daher die Stetigkeit von $\exp_{|[-a,a]}$, und dies ergibt die Stetigkeit von $\exp$ in x.

BEWEIS 2/2

Da die Reihendarstellung der Exponentialfunktion in jedem Punkt absolut konvergiert, siehe (4.2.6), dürfen wir nach Satz 4.2.7 die Reihen umordnen. Mit dem Binomischen Lehrsatz 2.2.7 gilt dann

$$
\begin{aligned}
\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \frac{y^k}{k!} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) \\
&= \exp(y) \exp(x) \, ,
\end{aligned}
$$

wobei wir in der vierten Gleichung das Cauchy-Produkt von Reihen ausgenutzt haben, dass in Abbildung 15 illustriert ist.

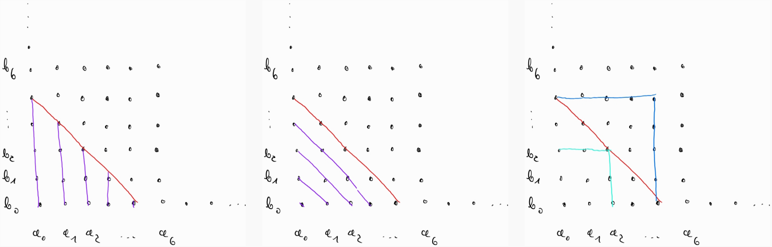


Abbildung: Cauchy-Produkt $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} b_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, wobei die absolute Konvergenz der beiden linken Reihen gefordert wird und die absolute Konvergenz der rechten Reihe folgt. **Links:** Spaltenweise (lila) Summation $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j$ über das rote Dreieck. **Mitte:** Äquivalente, diagonale Summation $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_i b_{i-j}$ über das Dreieck. **Rechts:** Einschachtelung der Dreiecks-Summe durch 2 Quadratsummen $(\sum_{i=0}^{m} a_i) \cdot (\sum_{j=0}^{m} b_j) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j$ für $m = \lfloor n/2 \rfloor$ (türkis) und $m = n$ (blau). Die Differenz zwischen blauen Quadrat und dem Dreieck kann nach oben durch die Differenz zwischen blauen und türkisen Quadrat abgeschätzt werden.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(1) = \mathrm{e}$ und $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt zunächst

$$\mathrm{e} = f(1) = f(m/m) = f(1/m)^m\,, \qquad m \in \mathbb{N}$$

und damit $f(1/m) = \mathrm{e}^{1/m}$. Für $q = k/m \in \mathbb{Q}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ folgt

$$f(q) = f(k/m) = f(1/m)^k = \mathrm{e}^{k/m} = \mathrm{e}^q\,. \tag{5.3.1}$$

Die obigen Funktionalgleichungen erzwingen also ein eindeutiges Verhalten der Funktion f auf $\mathbb{Q}$. Da die Exponentialfunktion beide Gleichungen erfüllt, muss also $\exp(q) = \mathrm{e}^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ gelten, was zumindest für rationale Argumente unsere Notation $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ rechtfertigt. Ferner ist die Exponentialfunktion stetig und man kann mit (5.3.1) und der Approximation von $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$ zeigen, dass es nur ein stetiges f, das die beiden Gleichungen erfüllt, gibt. Daher ist unsere Definition der Exponentialfunktion identisch zu den in den vorherigen Kapiteln benutzte, heuristische Herangehensweise.

Ferner lässt sich das Lemma 4.1.17 zu der Gleichung

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

verallgemeinern, die wir hier aber nicht beweisen wollen.

Korollar 5.3.3

Es gilt $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *sowie* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Da $\exp(0) = 1$ gilt, folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ schon

$$1 = \exp(z)\,\exp(-z)$$

und damit $\exp(z) \neq 0$. Weiter ist für jedes $x \geq 0$ auch jede Partialsumme der Reihe positiv und es folgt $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$. Zusammen mit $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ folgt damit $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ferner gilt

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}\,,$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Stetigkeit der komplexen Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ benutzt haben.

Wir wollen nun die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion einführen. Dies geschieht in dem folgenden Lemma.

Lemma 5.3.4

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und erfüllt*

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

Damit existiert ihre Umkehrfunktion

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,,$$

die durch

$$y = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$$

charakterisiert ist, und diese ist ebenso streng monoton wachsend und stetig.

Für $x \geq 0$ liefert die Reihendarstellung

$$\exp(x) \geq 1 + x \tag{5.3.2}$$

damit $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$. Damit folgt auch

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} \exp(x)} = 0\,.$$

Für $x > 0$ liefert unsere anfängliche Abschätzung zudem $\exp(x) \geq 1 + x > 1$ und für $x_2 > x_1$ ergibt dies

$$\exp(x_2) - \exp(x_1) = \exp(x_1)\big(\exp(x_2 - x_1) - 1\big) > 0.$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Umkehrsatz 5.2.7.

CHAPTER 6: DIFFERENTIALRECHNUNG

Differentialrechnung dient unter anderem dazu

- Extremwerte zu berechnen (Stetigkeit lieferte uns die Existenz aber keine Methode zur Berechnung der Extremstellen)
- Geschwindigkeiten als Änderungsraten von Größen mathematisch zu beschreiben
- Gleichungen für Änderungsraten als Differentialgleichungen für Funktionen zu verstehen.

Wir werden in diesem Kapitel werden wir daher die Differentialrechnung rigoros aufbauen und beweisen. Viele Aspekte werden dabei aus der Schule in der einen oder anderen Form schon bekannt sein.

Section 6.1
Differenzierbarkeit

Definition 6.1.1

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar im Punkt** $x_0 \in (a, b)$, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Sie heißt **differenzierbar** auf (a, b), falls sie in jedem $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist. In diesem Fall bezeichnet man die Funktion $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ als die **Ableitung** von f.

Analog sind alle diese Begriffe für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ etc. definiert, wobei x_0 immer im “Inneren” des Definitionsbereichs von f liegen muss.

Jede konstante Funktion $f(x) = c$ auf einem Intervall $[a, b]$ ist differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in (a, b)$, denn es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0\,.$$

Die Funktion $f(x) = x$ ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 1$, denn offensichtlich gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1\,.$$

Eine physikalische Interpretation

Beschreibt $t \mapsto s(t)$ den zurückgelegten Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t, so entspricht die Ableitung

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t. Dabei haben wir Δt für kleine Zeitdifferenzen und Δs für die in diesen Zeiten zurückgelegten Wegdifferenzen geschrieben. Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird oft als **Differentialquotient** bezeichnet und entsprechend suggestiv als

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

geschrieben, und als $\mathrm{d}s$ nach $\mathrm{d}t$ gelesen. Während es sich bei Δs und Δt jedoch um Zahlen handelt, haben hierbei $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}t$ keine eigenständige Bedeutung und sie sind daher als rein formale Symbole zu verstehen.

EINSEITIGE ABLEITUNGEN

Wir sagen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist **linksseitig differenzierbar** in $x_0 \in [a, b]$, falls der einseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Analog ist f **rechtsseitig differenzierbar** in $x_0 \in [a, b]$, falls der einseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Eine Funktion ist in x_0 differenzierbar, genau dann, wenn sie links- und rechtsseitig differenzierbar in x_0 ist *und* die beiden einseitigen Ableitungen gleich sind.

Analog sind alle diese Begriffe für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ etc. definiert.

Die Abbildung $x \mapsto |x|$ ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar, da die linksseitige Ableitung -1 ist, die rechtsseitige aber 1 ist.

Lemma 6.1.2
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar und es gilt* $\exp' = \exp$.

Wir zeigen die Aussage zunächst für $x_0 = 0$. Für $x > 0$ gilt wegen $\exp(x) \geq 1 + x$, siehe auch (5.3.2), die Abschätzung

$$1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \leq \exp(x)\,.$$

Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion, siehe Proposition 5.3.2, und $\exp(0) = 1$ folgt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\exp(x) - 1}{x - 0} = 1.$$

Damit folgt aber ebenso

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \exp(x) \frac{1 - \exp(-x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \exp(x) \frac{\exp(-x) - 1}{-x} = 1\,.$$

Zusammen ergibt dies die Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$ mit $\exp'(x_0) = 1$. Für allgemeine x_0 gilt nun

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\exp(x) - \exp(x_0)}{x - x_0} = \exp(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{\exp(x - x_0) - 1}{x - x_0} = \exp(x_0)\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

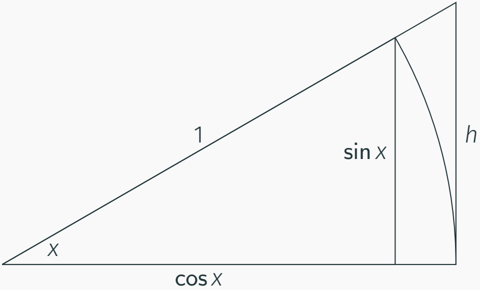
Das folgende Lemma bestimmt die Ableitungen der geometrisch eingeführten Winkelfunktionen.

Lemma 6.1.3

Die Winkelfunktionen $\sin$ *und* $\cos$ *sind differenzierbar und für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\sin' x = \cos x \qquad \text{und} \qquad \cos' x = -\sin x.$$

Wir zeigen zunächst $\sin'(0) = 1$. Dazu betrachten wir zunächst für $x \in (0, \pi/2)$ die folgende Skizze am Einheitskreis



Die Fläche A_1 des kleineren Dreiecks lässt sich dann durch

$$A_1 = \frac{1}{2}\cos x \sin x$$

berechnen. Nach dem Strahlensatz gilt ferner $h = \frac{h}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}$ und damit ist die Fläche A_3 des größeren Dreiecks

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Schließlich ist die Fläche A_2 des Kreissegments proportional zum Winkel, und da der Einheitskreis die Fläche π und den Umfang 2π hat, gilt folglich

$$\frac{A_2}{\pi} = \frac{x}{2\pi}.$$

Aus $A_1 \leq A_2 \leq A_3$ schließen wir nun $\cos x \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ und damit auch

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Wegen $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$ folgt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

und wegen $\frac{\sin(-x) - \sin 0}{-x - 0} = \frac{\sin x}{x}$ gilt das gleiche für die linksseitige Ableitung.

Als nächstes zeigen wir $\cos'(0) = 0$. Dazu betrachten wir zunächst

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-\sin x}{\cos x + 1} \to 1 \cdot 0$$

für $x \to 0$.

Mit diesen Vorbereitungen und den Additionstheoremen können wir nun schließen:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

Der Beweis für $\cos' x = -\sin x$ ist analog.

Aus der Schule ist bekannt, dass die Ableitung $f'(x_0)$ als Anstieg der Tangente am Graphen der Funktion im Punkt $(x_0, f(x_0))$ interpretiert werden. Diese Gerade g ist durch die Gleichung

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

gegeben. Bildet man die Differenz zwischen beiden Funktionen, so erhält man den Approximationsfehler

$$R_1(x) := g(x) - f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) - f(x)$$

und die Definition der Differenzierbarkeit bedeutet gerade, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = 0 \tag{6.1.1}$$

gilt. Man sagt, der Fehler sei **klein-o** von $x - x_0$ und schreibt

$$R_1(x) = \mathrm{o}(x - x_0)\,, \qquad\qquad x \to x_0,$$

Der Approximationsfehler konvergiert also schneller als linear gegen 0. Ferner zeigt eine analoge Rechnung, dass jede andere lineare Approximation

$$a(x) = m \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

von f im Punkt x_0 *keinen* $o(x - x_0)$ Fehler hat.

Ferner zeigt der folgende Satz, dass die Differenzierbarkeit in x_0 sogar äquivalent zur linearen Approximierbarkeit in x_0 mit $o(x - x_0)$ Fehler ist.

Theorem 6.1.4

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann sind äquivalent:

i). *f ist in x_0 differenzierbar*

ii). *Es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = \mathrm{o}(x - x_0)$ für $x \to x_0$, so dass*

$$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \varphi(x)\,, \qquad x \in [a, b]. \tag{6.1.2}$$

In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Für $c = f'(x_0)$ und $\varphi(x) := R_1(x)$ haben wir dies in (6.1.1) gezeigt.

ii) $\Rightarrow$ *i)*. Einsetzen von (6.1.2) in den Differenzenquotienten ergibt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c \cdot (x - x_0) + \varphi(x)}{x - x_0} = c + \frac{\varphi(x)}{x - x_0}$$

Für $x \to x_0$ folgt dann die Behauptung.

Korollar 6.1.5

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ gemäß (6.1.2). *Dann ist f in x_0 stetig und es gilt*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \left| c + \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \right| \cdot |x - x_0|\,, \qquad x \in [a,b].$$

Beweis.

Mit (6.1.2) gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |c \cdot (x - x_0) + \varphi(x)| = \left| \left(c + \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \right) \cdot (x - x_0) \right|.$$

Damit folgt die Ungleichung und die Stetigkeit ist eine direkte Konsequenz der Ungleichung und der Eigenschaften von φ. $\square$

Man kann explizit Funktionen angeben, die stetig aber in keinem Punkt differenzierbar sind. Ein Beispiel hierfür ist die sogenannte Weierstraß-Funktion. Die vom Wiener-Prozess, der auch als Brown'sche Bewegung bekannt ist, erzeugten zufälligen Funktionen sind mit Wahrscheinlichkeit 1 in keinem Punkt differenzierbar.

Wie schon bei Grenzwerten, Reihen und der Stetigkeit kann die Betrachtung von Ableitungen erheblich durch einige wichtige Rechenregeln vereinfacht werden.

Theorem 6.1.6

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i). ***Linearität:*** *Die Linearkombination $\alpha f + \beta g$ ist in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)\,.$$

ii). ***Produktregel:*** *Das Produkt fg ist in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,.$$

iii). ***Quotientenregel:*** *Falls $g(x_0) \neq 0$ gilt, so ist der Quotient $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,.$$

i). Folgt sofort aus der Linearität des Grenzwertes, siehe Satz 4.1.7.

ii). Addieren von $0 = -f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$ im Zähler ergibt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,
\end{aligned}$$

da g als in x_0 differenzierbare Funktion dort auch stetig ist, siehe Korollar 6.1.5.

iii). Für den Spezialfall $f = 1$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \frac{-1}{g(x)g(x_0)} = g'(x_0) \frac{-1}{(g(x_0))^2}\,,$$

wobei wegen $g(x_0) \neq 0$ und der Stetigkeit von g in x_0 auch $g(x) \neq 0$ für alle hinreichend kleinen Abstände $|x - x_0|$ gilt. Mit *ii)* folgt der allgemeine Fall.

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist die $g_k(x) := x^k$ differenzierbar und es gilt

$$g_k'(x) = kx^{k-1}\,. \tag{6.1.3}$$

Für $k \in \{0, 1\}$ hatten wir dies schon gesehen, und ist die Aussage für k schon bewiesen, so folgt mit der Produktregel:

$$g_{k+1}'(x) = (g_k \cdot g_1)'(x) = g_k'(x)g_1(x) + g_k(x)g_1'(x) = kx^{k-1}x + x^k = (k+1)x^k\,.$$

Mit der Linearität sind damit auch Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ differenzierbar mit

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}\,, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.1.4}$$

Zudem gilt mit der Quotientenregel, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k(x) = x^{-k} = \frac{1}{g_k(x)}$ in $x \neq 0$ differenzierbar ist mit

$$f_k'(x) = \left(\frac{1}{g_k}\right)'(x) = -\frac{g_k'(x)}{(g_k(x))^2} = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1}\,.$$

Insgesamt gilt also (6.1.3) für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Die Funktion $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist nach der Quotientenregel in allen $x \in \mathbb{R}$ mit $\sin x \neq 0$ differenzierbar und mit wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,. \tag{6.1.5}$$

Analog ist der Kotangens $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ in allen $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ differenzierbar und es gilt

$$\cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x\,. \tag{6.1.6}$$

Das folgende Resultat, das als **Kettenregel** bekannt ist, betrachtet die Differenzierbarkeit von Kompositionen:

Theorem 6.1.7

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass f in x_0 differenzierbar und g in $f(x_0)$ differenzierbar ist. Dann ist $x \mapsto g \circ f(x)$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.$$

Intuitiv folgt die Aussage sofort aus

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0). \end{aligned}$$

Das Problem an dieser Argumentation ist nur, dass aus $x \neq x_0$ nicht $f(x) \neq f(x_0)$ folgt, und somit der erste Differenzenquotient nicht definiert sein muss.

Wir fixieren eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n \neq x_0$ für alle $n \geq 1$. Ferner schreiben wir $y_n := f(x_n)$ und $y_0 := f(x_0)$. Um mit dem Fall $f(x_n) = f(x_0)$ umgehen zu können, definieren wir $g^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g^*(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{falls } y \neq y_0\,, \\ g'(y_0) & \text{falls } y = y_0\,. \end{cases}$$

Damit gilt $g^*(y_n) \to g'(y_0) = g'(f(x_0))$ für $n \to \infty$ und

$$g(y) - g(y_0) = g^*(y) \cdot (y - y_0)\,, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Für $y = y_n = f(x_n)$ ergibt dies

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} &= \lim_{n\to\infty} \frac{g^*(y_n) \cdot (f(x_n) - f(x_0))}{x_n - x_0} \\ &= \lim_{n\to\infty} g^*(y_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \\ &= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,. \end{aligned}$$

Da die Wahl der Folge beliebig war, folgt die Behauptung.

Theorem 6.1.8

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar und gilt $f'(x) \neq 0$ auf (a, b), so ist die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ ebenso differenzierbar und es gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

für alle $y \in f\big((a, b)\big)$, wobei $f\big((a, b)\big)$ das Bild von (a, b) unter f ist.

Falls wir schon wissen, dass g differenzierbar ist, folgt die Formel aus $g(f(x)) = x = \mathrm{id}(x)$ und der Kettenregel

$$1 = \mathrm{id}'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(y) \cdot f'(g(y)) \, ,$$

wobei im letzten Schritt $y := f(x)$, d.h. $g(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ gesetzt wurde.

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \neq y$ und $y_n \to y$. Wir schreiben $x_n := g(y_n)$ und $x := g(y)$. Wegen $y_n \neq y$ gilt dann $x_n \neq x$ und da g nach Satz 5.2.7 stetig ist haben wir auch $x_n \to x$. Es folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x - x_n}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} .$$

Da die Wahl der Folge beliebig war, folgt die Behauptung.

Da die Logarithmusfunktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist und diese differenzierbar mit $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, siehe Lemma 6.1.2 und Korollar 5.3.3, ist die Logarithmusfunktion differenzierbar und es gilt

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}\,. \tag{6.1.7}$$

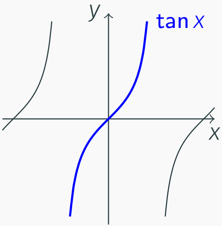
Die Arkussinusfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ ist differenzierbar

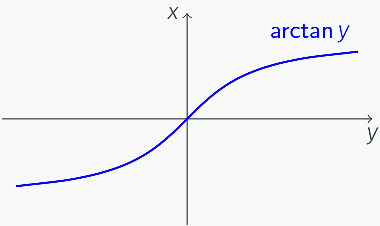
$$\begin{aligned} \arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,, \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

wobei wir $\cos x \geq 0$ für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ ausgenutzt haben. Analog gilt:

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \tag{6.1.9}$$

Der **Arkustangens** $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\tan$ eingeschränkt auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.





Wegen der zweiten Identität in (6.1.5) ist die Ableitung durch

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ gegeben.

Section 6.2
Hauptsätze

Definition 6.2.1

Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann hat f in x_0 ein:

i). **lokales Maximum**, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$f(x) \leq f(x_0)\,.$$

Gilt diese Ungleichung sogar für alle $x \in I$, so hat f in x_0 ein **globales Maximum**.

ii). **lokales Minimum**, falls $-f$ ein globales Maximum in x_0 hat, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$f(x) \geq f(x_0)\,.$$

Gilt diese Ungleichung sogar für alle $x \in I$, so hat f in x_0 ein **globales Minimum**

In beiden Fällen sprechen wir von **lokalen** bzw. **globalen Extrema**.

Offensichtlich ist jedes globale Maximum auch ein lokales Maximum, und die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Der folgende Satz liefert ein notwendiges Kriterium zum Finden eines lokalen Extremums.

Theorem 6.2.2

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

BEWEIS

Es reicht den Fall eines Maximums in x_0 zu betrachten. Sei nun $\delta > 0$, so dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ und

$$f(x) \leq f(x_0)$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt. Für $x < x_0$ gilt dann $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, und daher folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Analog finden wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

und zusammen ergibt dies $f'(x_0) = 0$.

BEISPIEL

Dieses notwendige Kriterium für Extrema erlaubt es, Kandidaten für Extrema als Nullstellen der Ableitung zu bestimmen. Wir bezeichnen Nullstellen der Ableitung von f deswegen als **kritische Punkte**.

Um ein Beispiel zu betrachten, sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch Wir suchen Extrema der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion. Etwas Rechnen zeigt, dass die Ableitung dann

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

ist. Potentielle Extrema liegen daher nur in $x = \pm 1$ vor, alle anderen Punkte sind ausgeschlossen. Aus $(1-x)^2 \geq 0$ folgt nun $1 + x^2 \geq 2x$ und damit

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} = f(1),$$

d.h. f hat ein globales Maximum in 1. Analog kann man zeigen, dass f in -1 ein globales Minimum hat.

Der folgende Satz ist als **Mittelwertsatz** bekannt und spielt eine wichtige Rolle in unseren weiteren Überlegungen.

Theorem 6.2.3

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und differenzierbar. Dann existiert ein* $x_0 \in (a, b)$ *mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Wir betrachten die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)\,, \qquad x \in [a, b]$$

definiert ist. Dann ist F stetig und differenzierbar mit

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6.2.1}$$

und es gilt $F(a) = f(a) = F(b)$.

Falls nun $F(x) = f(a)$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, so hat z.B. F ein lokales Maximum in $x_0 := (a + b)/2$ und nach Satz 6.2.2 gilt $F'(x_0) = 0$. Mit (6.2.1) folgt die Behauptung.

Falls es ein $x \in (a, b)$ mit $F(x) \neq f(a)$ gibt, betrachten wir zunächst den Fall $F(x) > f(a)$. Da F nach Satz 5.2.8 sein globales Maximum in einem $x_0 \in [a, b]$ annimmt, gilt dann $F(x_0) \geq F(x) > f(a) = F(a) = F(b)$, und damit $x_0 \in (a, b)$. Mit Satz 6.2.2 folgt $F'(x_0) = 0$ und (6.2.1) liefert die Behauptung.

Der Fall $F(x) < f(a)$ ist analog über globale Minima zu zeigen.

Der folgende Spezialfall des Mittelwertsatzes mit $f(a) = f(b)$ wird als Satz von Rolle bezeichnet.

Korollar 6.2.4

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Gilt nun $f(a) = f(b)$, so existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Eine weitere wichtige Folgerung betrifft das Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen.

Korollar 6.2.5

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

i). *Es gilt* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$ *genau dann, wenn* f *monoton wachsend ist.*

ii). *Falls* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a, b)$*, dann ist* f *streng monoton wachsend.*

iii). *Es gilt* $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in (a, b)$ *genau dann, wenn* f *konstant ist.*

Analog lassen sich durch Betrachtung von $-f$ auch fallende Funktionen durch negative Ableitungen beschreiben. Die Rückrichtung in *ii)* ist falsch, wie z.B. das Beispiel $x \mapsto x^3$ in $x = 0$ zeigt.

"$\Rightarrow$"). Wir wählen $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 < x_2$ und betrachten die eingeschränkte Funktion $f_{|[x_1,x_2]}$. Diese ist differenzierbar und ihre Ableitung gleich $f'_{|(x_1,x_2)}$. Insbesondere ist die Einschränkung nach Korollar 6.1.5 auch stetig. Der Mittelwertsatz 6.2.3 liefert daher ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)\,.$$

Wegen $x_2 - x_1 > 0$ können dann die einzelnen Aussagen "abgelesen" werden.

"$\Leftarrow$"). Für konstante Funktionen wissen wir bereits, dass ihre Ableitung gleich 0 ist. Ist wiederum f monoton wachsend, so gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

für alle $x, x_0 \in (a,b)$ mit $x \neq x_0$. Daraus folgt $f'(x_0) \geq 0$ für alle $x_0 \in (a,b)$.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion. Dann gilt

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0$$

und damit ist f streng wachsend.

Mit diesen Einsichten können wir nun die folgende, hinreichende Bedingung für ein lokales Maxima beweisen.

Theorem 6.2.6

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Gibt es nun ein $\delta > 0$ mit

$$f'(x) > 0\,, \qquad\qquad x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

und

$$f'(x) < 0\,, \qquad\qquad x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

so besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.

Beweis.

Nach Korollar 6.2.5 ist f auf $(x_0 - \delta, x_0)$ streng wachsend, d.h. $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.
Nach Korollar 6.2.5 ist f auf $(x_0, x_0 + \delta)$ streng fallend, d.h. $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.
Insgesamt hat f daher ein lokales Maximum in x_0. $\square$

Wir hatten schon gesehen, dass die Exponentialfunktion die Gleichung $\exp' = \exp$ erfüllt. Der folgende Satz zeigt, dass die Exponentialfunktion die einzige Funktion f mit $f' = f$ und $f(0) = 1$ ist.

Theorem 6.2.7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f'(x) = cf(x)\,, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $f(x) = f(0) \cdot \exp(cx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten die Funktion $g(x) := f(x) \cdot \exp(-cx)$ für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt dann mit der Produktregel

$$g'(x) = f'(x) \cdot \exp(-cx) - cf(x) \cdot \exp(-cx) = \big(f'(x) - cf(x)\big) \cdot \exp(-cx) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist g nach Korollar 6.2.5 konstant. Wegen $g(0) = f(0)$ folgt $g(x) = f(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein einfaches Umstellen dieser Identität liefert die Behauptung.

Die folgende hinreichende Bedingung für lokale Extrema ist schon aus der Schule bekannt. Für seine Formulierung sagen wir, dass eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ **stetig differenzierbar** ist, falls f differenzierbar ist und f' stetig ist. Analog ist f **zweimal stetig differenzierbar**, falls f stetig differenzierbar ist und f' auch stetig differenzierbar ist.

Theorem 6.2.8

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ferner sei $x_0\in(a,b)$ mit $f'(x_0)=0$. Dann gilt:

i). *Im Fall $f''(x_0)<0$ besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.*

ii). *Im Fall $f''(x_0)>0$ besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.*

Der Vorteil des Satzes 6.2.8 gegenüber Satz 6.2.6 ist, dass er nur mit dem Vorzeichen der zweiten Ableitung im Punkt x_0 arbeitet. Dieses ist häufig einfach zu bestimmen. Jedoch benötigen wir zweifache stetige Differenzierbarkeit der Funktion f um ihn anzuwenden und er liefert auch keine Aussage, falls $f''(x_0)=0$ gilt.

Wir zeigen nur *ii)*, da *i)* durch die Betrachtung von $-f$ folgt.

Da f'' stetig ist mit $f''(x_0) > 0$, existiert für $\varepsilon := f''(x_0)/2 > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f''(x_0) - f''(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Für solche x folgt

$$f''(x_0) < f''(x) + \varepsilon = f''(x) + f''(x_0)/2$$

und damit $f''(x) > 0$. Damit ist f' nach Korollar 6.2.5 streng wachsend auf dem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Da $f'(x_0) = 0$ vorausgesetzt ist, folgt also $f'(x) < 0$ auf $(x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) > 0$ auf $(x_0, x_0 + \delta)$ und mit Satz 6.2.6 angewendet auf $-f$ folgt die Behauptung.

Zum Schluss geben wir noch eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes an, die für einige spätere Beweise wichtig sein wird.

Theorem 6.2.9

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und differenzierbar. Sei weiter* $g'(x) \neq 0$ *auf* (a, b)*. Dann existiert ein* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Wäre $g(b) = g(a)$, so gäbe es nach dem Satz von Rolle 6.2.4 ein $g'(x) = 0$. Da wir dies ausschließen, folgt $g(b) \neq g(a)$. Damit ist die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

auf ganz $[a, b]$ definiert und auf (a, b) differenzierbar. Wegen

$$\begin{aligned} F(a) - F(b) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) - f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) \\ &= f(a) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(a) - g(b)) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

d.h. $F(a) = F(b)$, existiert nach dem Satz von Rolle 6.2.4 ein $\xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0$ und damit folgt

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Ein einfaches Umformen liefert dann die Behauptung.

Definition 6.2.10

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt $f : I \to \mathbb{R}$ **konvex**, falls für alle $x_0, x_1 \in I$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)\,. \tag{6.2.2}$$

Die Funktion heißt **strikt konvex**, falls die obige Ungleichung strikt ist. Schließlich heißt f **(strikt) konkav**, falls $-f$ (strikt) konvex ist.

Die Definition lässt sich von Intervallen auf Vektorräume verallgemeinern. Offensichtlich sind affin linear Funktionen sowohl konvex als auch konkav, aber in beiden Fällen ist dies nicht strikt. Schließlich ist die Ungleichung (6.2.2) sowohl für $x_0 = x_1$ als auch für $t \in \{0, 1\}$ immer erfüllt.

Konvexe Funktionen spielen in vielen Bereichen eine wichtige Rolle, u.a. weil es für solche Funktionen effektive Algorithmen zum Finden von Minima gibt.

Der folgende Satz liefert ein einfaches hinreichendes Kriterium für die Konvexität.

Theorem 6.2.11

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.

Man beachte, dass sich Satz 6.2.11 mit Korollar 6.2.5 angewendet auf f' verbinden lässt. Dies zeigt, dass eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt.

BEWEIS 1/2

Seien f konvex, $x_0, x_1 \in (a, b)$ mit $x_0 < x_1$ und $t \in (0, 1)$. Dann gilt

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$$

und damit auch

$$\frac{f\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big) - f(x_0)}{t \cdot (x_1 - x_0)} \cdot (x_1 - x_0) \leq f(x_1) - f(x_0)\,.$$

Für $t \to 0$ folgt

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

und für $x_0 \to x_1$ damit auch $f'(x_0) \leq f'(x_1)$.

Sei nun f' monoton wachsend. Für $x_0, x_1 \in (a, b)$ mit $x_0 < x_1$ und $t \in (0, 1)$ schreiben wir $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$. Es gilt dann $x_t \in (x_0, x_1)$ und der Mittelwertsatz 6.2.3 liefert damit $\xi_0 \in (x_0, x_t)$ und $\xi_1 \in (x_t, x_1)$ mit

$$\frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0} = f'(\xi_0) \leq f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t} .$$

Wegen $x_t - x_0 = t(x_1 - x_0)$ und $x_1 - x_t = (1-t)(x_1 - x_0)$ folgt

$$\frac{f(x_t) - f(x_0)}{t} \leq \frac{f(x_1) - f(x_t)}{1-t}$$

und damit $(1-t)(f(x_t) - f(x_0)) \leq t(f(x_1) - f(x_t))$. Dies wiederum impliziert

$$f(x_t) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) ,$$

was der Konvexitäts-Ungleichung (6.2.2) entspricht.

Die Regel von de L'Hospital liefert eine elegante Möglichkeit zur Berechnung von Funktionsgrenzwerten, die in Form unbestimmter Ausdrücke

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad \infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty$$

erscheinen. Die Regel von L'Hospital für Quotienten ergibt sich als Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Wie bei den elementaren Grenzwertsätzen liefert sie eine Methode zur Berechnung von Grenzwerten, die gleichzeitig deren Existenz mit beweist. Es ist jedoch Vorsicht geboten, die Voraussetzungen der Regel sind in jedem Schritt zu prüfen.

Theorem 6.2.12
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0 \tag{6.2.3}$$

und $g'(x) \neq 0$ für $x < b$. Existiert dann der Grenzwert $\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Eine analoge Aussage gilt für rechtsseitige Grenzwerte. Ferner gilt die Aussage auch, falls $\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ein uneigentlicher Grenzwert ist.

Wegen (6.2.3) können wir f und g auf $(a, b]$ durch $f(b) := g(b) := 0$ stetig fortsetzen. Im folgenden nehmen wir an, dass wir dies getan haben.

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ mit $x_n \to b$. Wenden wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz 6.2.9 auf die Einschränkungen von f und g auf $[x_n, b]$ an, so existiert ein $\xi_n \in (x_n, b)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_n) - f(b)}{g(x_n) - g(b)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Ferner impliziert $x_n \to b$ die Konvergenz $\xi_n \to b$ und damit folgt

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to b-} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Theorem 6.2.13

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \infty$$

und $g'(x) \neq 0$ für $x < b$. Existiert dann der Grenzwert $\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Eine analoge Aussage gilt für rechtsseitige Grenzwerte. Ferner gilt die Aussage auch, falls $\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ein uneigentlicher Grenzwert ist oder $b = \infty$ ist.

Der Beweis ist etwas aufwendiger als der von Satz 6.2.12 und wird aus Zeitgründen daher übersprungen.

Betrachten wir schließlich ein paar Beispiele. Mit Satz 6.2.13 finden wir

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0. \tag{6.2.4}$$

Dabei wurde der gegebene unbestimmte Ausdruck der Form $0 \cdot \infty$ in einen Quotienten der Form $\frac{\infty}{\infty}$ umgeschrieben.

Mit Satz 6.2.12 finden wir z.B.:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Hier wurde der gegebene unbestimmte Ausdruck der Form $0\cdot\infty$ in einen Quotienten der Form $\frac{0}{0}$ umgeschrieben.

Manchmal führt die Anwendung einer der Regeln leider nicht zum Erfolg. Der Versuch Satz 6.2.12 wiederholt zu benutzen führt in diesem Beispiel zu

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}\frac{1}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{2x^3} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}\frac{1}{x^2}}{6x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{6x^4} \\
&= \cdots .
\end{aligned}$$

Der Ausdruck wird also mit jeder Anwendung von Satz 6.2.12 komplizierter. Wendet man stattdessen Satz 6.2.13, so ergibt sich

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-e^{1/x}\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0.$$

ANWENDUNG: KURVENDISKUSSION

1. Definitions- und Wertebereich
2. Symmetrie-Eigenschaften (gerade oder ungerade Funktionen, Spiegelsymmetrien zu anderen Punkte oder senkrechten Linien, Periodizität)
3. Stetigkeit und Stetigkeitsintervalle, eventuelle Definitionslücken, Polstellen
4. Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse
5. Extremalstellen und Monotonieintervalle
6. Konvexitätsintervalle. Ist die Funktion zweifach differenzierbar, so sind die Konvexitätsintervalle gerade die Monotonieintervalle der Ableitung.
7. Wendepunkte (und Wendetangenten), dabei sind Wendepunkte gerade die Punkte, in welchen sich das Konvexitätsverhalten ändert, die Funktion also von konvex zu konkav wechselt
8. asymptotisches Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches, damit meint man Grenzwerte der Funktion oder einfachere Funktionen, welche den Verlauf der gegebenen Funktion asymptotisch beschreiben
9. eine Skizze der Funktion und ggf. ihrer Ableitungen.

BEISPIEL

Wir geben ein Beispiel und untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x + 2}$$

definiert auf der Menge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Sie ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ stetig und besitzt in $x = -2$ eine Polstelle erster Ordnung, da

$$\lim_{x \to -2} (x + 2) f(x) = \lim_{x \to -2} (x^3 - 2x^2 - x + 2) = -12 \neq 0$$

gilt.

Wegen $f(0) = 1$ schneidet der Graph der Funktion die y-Achse im Punkt $(0, 1)$ und die Funktion f erfüllt

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 &= (x-1)(x+1)(x-2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und besitzt damit die Nullstellen $x = \pm 1$ und $x = 2$.

BEISPIEL

Das asymptotische Verhalten der Funktion $f(x)$ für große Werte von x ergibt sich durch Polynomdivision

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x + 2} = x^2 - 4x + 7 - \frac{12}{x + 2},$$

für $x \to \pm\infty$ nähert sich der Graph der Funktion der Parabel $g(x) = x^2 - 4x + 7$. Für $x \to -2$ verhält sich die Funktion wie $h(x) = 19 - \frac{12}{x+2}$.

Zum Bestimmen kritischer Punkte, sowie der Monotonie- und Konvexitätsintervalle, leiten wir die Funktion f ab. Das ergibt

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x - 1)(x + 2) - (x^3 - 2x^2 - x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 - 8x - 4}{(x + 2)^2}$$

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x^2 + 8x - 8)(x + 2)^2 - 2(2x^3 + 4x^2 - 8x - 4)(x + 2)}{(x + 2)^4} \\ &= \frac{2x^3 + 12x^2 + 24x - 8}{(x + 2)^3}. \end{aligned}$$

BEISPIEL

Potentielle Extremalstellen ergeben sich aus den Nullstellen der ersten Ableitung. Es gilt

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 + 4x^2 - 8x - 4 = 0$$

Dies liefert drei Nullstellen, da $x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ für $x \to \pm\infty$ gegen $\pm\infty$ strebt und an der Stelle $x = -1$ positiv und in $x = 1$ negativ ist. Bestimmt man diese näherungsweise, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 &\approx -3.1\,, \\ x_2 &\approx -0.43\,, \\ x_3 &\approx 1.51\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der Vorzeichen ist die Funktion auf $(-\infty, x_1)$ streng monoton fallend, auf $(x_1, -2)$ streng monoton steigend, auf $(-2, x_2)$ streng monoton steigend, auf (x_2, x_3) streng monoton fallend und auf (x_3, ∞) wiederum streng monoton steigend. Bei x_1 und x_3 liegen also lokale Minima vor, bei x_2 ein lokales Maximum.

Alternativ kann man natürlich auch einfach $f''(x_i)$ betrachten, um diese Extrema zu bestimmen.

Die zweite Ableitung besitzt nur eine reelle Nullstelle

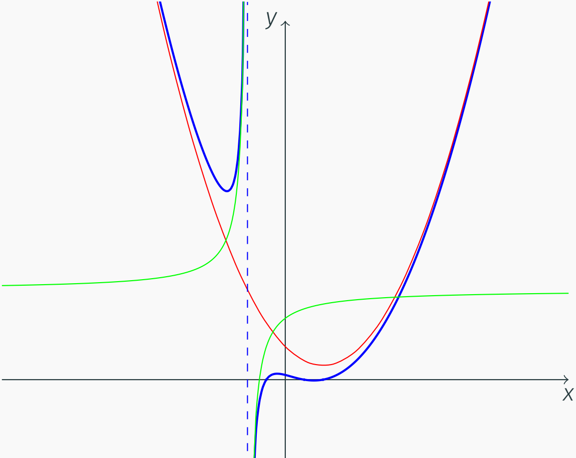
$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 6x^2 + 12x - 8 = 0,$$

da ihr Zähler wegen

$$\left(x^3 + 6x^2 + 12x - 8\right)' = 3x^2 + 12x + 12 = 3(x+2)^2 > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ streng monoton wachsend ist. Diese eine Nullstelle befindet näherungsweise bei $x_* \approx 0,3$ und es gilt für den Zähler von f'', dass $x^3 + 6x^2 + 12x - 8 < 0$ genau dann, wenn $x < x_*$. Der Nenner $(x+2)^3$ von f'' ändert wiederum sein Vorzeichen von negativ auf positiv bei $x = -2$. Damit ist $f'' \geq 0$ auf $(-\infty, -2) \cup (x_*, \infty)$ und $f'' \leq 0$ auf $(-2, x_*)$. Insgesamt ist daher die Funktion f auf $(-\infty, -2)$ und auf (x_*, ∞) konvex und auf $(-2, x_*)$ konkav.

Skizze: Dargestellt sind in blau die Funktion $f(x)$, in rot die für große $|x|$ asymptotisch äquivalente Funktion $g(x)$ und in grün die den Pol beschreibende Funktion $h(x)$. Die beiden Achsen haben verschiedene Maßstäbe, um das Verhalten der Funktion über einem größerem Bereich darstellen zu können.



CHAPTER 7: INTEGRATION

Section 7.1
Das Riemann-Integral

Wir wollen für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse bestimmen. Dabei sollen Flächen über der Achse positiv und Flächen unter der Achse als negativ gezählt werden.

Die Idee ist dabei die folgende: Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ mit Hilfe von **Zwischenstellen**

$$\mathcal{Z} : \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b \tag{7.1.1}$$

und approximieren den Flächeninhalt von unten und von oben durch entsprechende Summen von Rechtecksflächen.

Im folgenden bezeichnen wir eine solche **Zerlegung** von $[a, b]$ mit dem Buchstaben $\mathcal{Z}$ und nennen

$$\delta(\mathcal{Z}) = \max_{k=1,\dots,N} |x_k - x_{k-1}|$$

die **Feinheit der Zerlegung** $\mathcal{Z}$.

Betrachten wir beispielsweise die durch $x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{N}$ für $i = 0, \dots, N$ gegebene **äquidistante Zerlegung** $\mathcal{Z}$, so gilt $\delta(\mathcal{Z}) = (b - a)/N$.

Haben wir zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$, die durch $x_0, \ldots, x_N$ und $y_0, \ldots, y_M$ beschrieben sind, so schreiben wir

$$\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_2 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \{x_0, \ldots, x_N\} \subset \{y_0, \ldots, y_M\}.$$

In diesem Fall heißt $\mathcal{Z}_2$ **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}_1$ und es gilt $\delta(\mathcal{Z}_1) \geq \delta(\mathcal{Z}_2)$.

Eine Möglichkeit, eine Verfeinerung zu konstruieren ist die **Vereinigung $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ der Zerlegungen** $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$, die durch die Vereinigung

$$\{z_0, \ldots, z_K\} := \{x_0, \ldots, x_N\} \cup \{y_0, \ldots, y_M\}$$

der Zwischenstellen entsteht. Hierbei erfüllen die Zwischenstellen der Vereinigung wieder $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_{K-1} < z_K = b$, was durch Sortieren und eliminieren doppelter Elemente immer erreichbar ist, vgl. Abbildung 16.

Offensichtlich gilt $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ und $\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$. Die Vereinigung zweier äquidistanter Zerlegungen ist im Allgemeinen keine äquidistante Zerlegung mehr, siehe wieder Abbildung 16.

Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit den Bezeichnungen aus (7.1.1). Dann betrachten wir **Darboux'sche Obersumme**

$$\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \sup_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} f(\xi)$$

und die **Darboux'sche Untersumme**

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \inf_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} f(\xi) .$$

Offensichtlich gilt, siehe auch Abbildung 17

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) . \tag{7.1.2}$$

Wegen $\inf(-A) = -\sup A$, siehe (2.4.1), gilt ferner

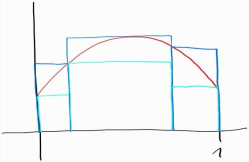
$$-\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) = \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(-f) . \tag{7.1.3}$$

Haben wir zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_2$ so gilt ferner

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Z}_1}(f) \leq \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_2}(f) , \tag{7.1.4}$$

$$\mathrm{I}^{\mathcal{Z}_1}(f) \geq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_2}(f) , \tag{7.1.5}$$

siehe wieder Abbildung 17



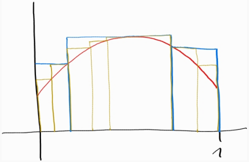


Abbildung: Links: Darboux'sche Unter- und Ober-Summen für eine feste Zerlegung. Die Untersumme entspricht der Fläche der drei türkisfarbenen Rechtecke während die Obersumme der Fläche der drei blauen Rechtecke entspricht. **Rechts:** Die gleiche Obersumme und die Obersumme einer verfeinerten Zerlegung. Die resultierende Fläche der 7 braunen Rechtecke ist kleiner als die der drei blauen Rechtecke.

Das folgende Lemma nutzt die letzten beiden Beobachtungen aus, um (7.1.2) zu verschärfen.

Lemma 7.1.1

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$\sup\{\mathrm{I}_{\mathcal{Z}'}(f) \mid \mathcal{Z}' \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \leq \inf\{\mathrm{I}^{\mathcal{Z}''}(f) \mid \mathcal{Z}'' \text{ Zerlegung von } [a,b]\}\,.$$

Seien $\mathcal{Z}'$ und $\mathcal{Z}''$ zwei Zerlegungen von $[a, b]$. Für $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}' \cup \mathcal{Z}''$ folgt aus (7.1.4), (7.1.2) und (7.1.5) dann

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Z}'}(f) \leq \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) \leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}''}(f)\,.$$

Nimmt man dann zunächst das Supremum über alle $\mathcal{Z}'$ und dann das Infimum über alle $\mathcal{Z}''$, so ergibt sich die Behauptung.

Mit diesen Betrachtungen können wir nun die Integrierbarkeit von Funktionen definieren.

Definition 7.1.2

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, falls für jede Folge $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen $\mathcal{Z}_n$ mit $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$ die Grenzwerte der zugeordneten Unter- und Obersummen existieren mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f)\,.$$

Im folgenden sprechen wir häufig auch nur kurz von **R-integrierbar**.

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt für jede Zerlegung $\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) = \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) = c \cdot (b - a)$. Damit ist f Riemann-integrierbar.

Das folgende Lemma stellt die Riemann-Integrierbarkeit in Bezug zu unseren anfänglichen Beobachtungen.

Lemma 7.1.3

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \sup\{\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\}\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f) = \inf\{\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

und damit sind auch das Infimum und das Supremum gleich.

Wir schreiben

$$S := \sup\{\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\}\,,$$
$$I := \inf\{\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\}\,.$$

Für $n \geq 1$ gelten dann sofort die Ungleichungen

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f) \leq S\,,$$
$$I \leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f)\,,$$

und für $n \to \infty$ erhalten wir damit

$$I \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f) \leq S\,.$$

Nach Lemma 7.1.1 gilt zudem $S \leq I$, was die Behauptung zeigt.

In der Definition von Riemann-Integrierbarkeit muss die Existenz zweier Grenzwerte gesichert werden. Dieses ist aber nicht notwendig, wenn wir für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stattdessen

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f)\Big) = 0 \tag{7.1.6}$$

für alle Folgen $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 1}$ von Zerlegungen $\mathcal{Z}_n$ von $[a, b]$ mit $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$ wissen. Um dies zu sehen, fixieren wir eine solche Folge $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Würde dann die Folge der Obersummen nicht konvergieren, gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(\mathcal{Z}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\mathrm{I}^{\mathcal{Z}_{n_k}}(f) > I + \varepsilon\,, \qquad\qquad k \geq 1.$$

Dies impliziert mit (7.1.2) und Lemma 7.1.1

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{I}^{\mathcal{Z}_{n_k}}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_{n_k}}(f)\right| = \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_{n_k}}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_{n_k}}(f) &> I + \varepsilon - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_{n_k}}(f)\\ &\geq S + \varepsilon - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_{n_k}}(f)\\ &\geq \varepsilon\,,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die triviale Ungleichung $\mathrm{I}_{\mathcal{Z}_{n_k}}(f) \leq S$ benutzt haben. Dies widerspricht (7.1.6) und damit muss die Folge der Obsersummen konvergieren. Dies wiederum ergibt wegen der Linearität des Limes

Der folgende Satz zeigt uns, dass die meisten Funktionen, für die wir uns interessieren, R-integrierbar sind.

Theorem 7.1.4

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist R-integrierbar.*

Nach Satz 5.2.8 ist f beschränkt und nach Satz 5.2.10 ist f gleichmäßig stetig. Für $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in [a, b]$ mit $|x - x'| \leq \delta$ auch $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ gilt.

Wir wählen uns jetzt eine Zerlegung $\mathcal{Z} : x_0, \dots, x_N$ mit Feinheit $\delta(\mathcal{Z}) \leq \delta$. Da f auf $[x_{k-1}, x_k]$ stetig ist, gibt es nach Satz 5.2.8 dann $x_{k,*}, x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ mit

$$f(x_{k,*}) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)\,,$$

$$f(x_k^*) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)\,.$$

Wegen $|x_{k,*} - x_k^*| \leq |x_k - x_{k-1}| \leq \delta$ folgt dann $|f(x_{k,*}) - f(x_k^*)| \leq \varepsilon$ und damit auch

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f)\right| &= \sum_{k=1}^{N} |x_k - x_{k-1}| \cdot \left|f(x_k^*) - f(x_{k,*})\right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \qquad (7.1.7) \\ &= \varepsilon(b - a)\,. \end{aligned}$$

BEWEIS 2/2

Haben wir nun eine Folge $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$, so gibt es ein $n_0 \geq 1$ mit $\delta(\mathcal{Z}_n) \leq \delta$ für alle $n \geq n_0$. Wendet man dann die obige Argumentation auf solche $\mathcal{Z}_n$ an, so ergibt sich

$$\left|\mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f)\right| \leq \varepsilon(b-a)$$

und dies zeigt $\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f)\right) = 0$, d.h. (7.1.6).

Nicht jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist R-integrierbar. Betrachten wir beispielsweise die Indikatorfunktion $f := \mathbf{1}_{[a,b]\setminus\mathbb{Q}} : [a, b] \to \mathbb{R}$, so gibt es für jedes Teil-Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ und eine irrationale Zahl $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $q, r \in [x_{k-1}, x_k]$. Es folgt

$$\inf_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} f(\xi) = 0\,,$$

$$\sup_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} f(\xi) = 1$$

und damit $\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) = 0$ und $\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) = b - a$ für *jede* Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$. Damit kann f nicht R-integrierbar sein.

Es gibt auch unstetige Funktionen, die Riemann-integrierbar sind. Betrachten wir dazu für $c \in [a, b]$ die Funktion $\mathbf{1}_{[c,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$. Es ist dann nicht schwierig zu zeigen, dass diese Funktion Riemann-integrierbar ist. Aus Zeitgründen überspringen wir aber den Beweis.

Mit Hilfe des Lemmas 7.1.3 können wir nun das Riemann-Integral definieren:

Definition 7.1.5

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$. Dann ist das **Riemann-Integral** von f durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f)\,.$$

definiert.

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$, so hatten wir schon $\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) = \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) = c \cdot (b - a)$ für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ gesehen. Dies ergibt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot (b - a)\,. \tag{7.1.8}$$

Man beachte, dass das Riemann-Integral nicht nur im Fall von (7.1.8) sondern *immer* unabhängig von der Wahl der Zerlegungen $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 1}$ ist, da die Grenzwerte nach Lemma 7.1.3 gleich den dort erwähnten Supremum, bzw. Infimum sind. Diese Beobachtung zeigt auch

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) \tag{7.1.9}$$

für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Tatsächlich ist es auch überflüssig, die Suprema und Infima in jedem Teil-Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ zu bestimmen. Wählt man nämlich zu einer Zerlegung $\mathcal{Z} : x_0, \ldots, x_N$ von $[a, b]$ beliebige **Stützstellen** $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, so gelten für jedes beschränkte $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Ungleichungen

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f)\,. \tag{7.1.10}$$

Wie wollen diese Summen als **Riemann-Summen** bezeichnen. Ist f Riemann-integrierbar, so nähern sich die Unter- und Obersummen für zunehmende Feinheit der Zerlegungen immer weiter an, und diese Einsicht ergibt den folgenden Satz.

Theorem 7.1.6

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar. Dann gilt für jede Folge* $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Zerlegungen* $\mathcal{Z}_n : x_0^{(n)}, \ldots, x_{N^{(n)}}^{(n)}$ *mit* $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$ *und jede zugehörige Wahl von Stützstellen* $\xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N^{(n)}} f(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}).$$

Insbesondere gilt also bei äquidistanter Stützstellenwahl

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right). \tag{7.1.11}$$

Riemann-Summen können helfen, Integrale explizit zu bestimmen. Um ein Beispiel zu geben, betrachten wir die Funktion $f(x) = x$. Diese ist auf jedem Intervall $[0, b]$ stetig und damit Riemann-integrierbar. Durch Betrachten des Grenzwert einer Riemann-Summe mit äquidistanten Stützstellen, siehe (7.1.11), erhalten wir

$$\int_0^b x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} b^2.$$

Die Güte der Approximation eines Integrals, durch Unter-, Ober-, oder Riemann-Summen kann für bestimmte Funktionen einfach quantifiziert werden. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beispielsweise α-Hölder-stetig mit Konstante c, so zeigt eine zu (7.1.7) analoge Abschätzung

$$\left|\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f)\right| \leq c \cdot (b - a) \cdot \delta^{\alpha}(\mathcal{Z})$$

für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$. Wegen (7.1.9) hat die Feinheit damit einen *kontrollierbaren* Einfluss auf die Güte der Approximationen

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) \approx \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f)\,.$$

Das gleiche gilt für die Approximation des Integrals durch eine Riemann-Summe $R_{\mathcal{Z}}$, denn wegen (7.1.9) und (7.1.10) haben wir

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - R_{\mathcal{Z}}\right| \leq \left|\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f)\right| \leq c \cdot (b - a) \cdot \delta^{\alpha}(\mathcal{Z})\,.$$

Für äquidistanten Stützstellen, siehe (7.1.11), ist die Feinheit der zugehörigen Zerlegung $\mathcal{Z}$ durch $\delta(\mathcal{Z}) = n^{-1}$ gegeben. Dies ergibt die Fehlerabschätzung $c \cdot (b - a)n^{-\alpha}$. Für glattere Funktionen gibt es aber deutlich bessere Approximationsverfahren.

Auch für das Riemann-Integral gibt es Rechenregeln. Der folgende Satz fasst die einfachsten zusammen.

Theorem 7.1.7

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

i). ***Linearität:*** *$\alpha f + \beta g$ ist Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

ii). ***Zerlegung des Definitionsbereichs:*** *Für jedes $c \in (a, b)$ ist f auch auf den Teil-Intervallen $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

i). Seien $\alpha, \beta \geq 0$ und $\mathcal{Z} : x_0, \ldots, x_N$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann gilt

$$\sup_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} \big(\alpha f(\xi) + \beta g(\xi)\big) \leq \alpha \sup_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} f(\xi) + \beta \sup_{\xi \in [x_{k-1}, x_k]} g(\xi) \tag{7.1.12}$$

und damit folgt $\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(\alpha f + \beta g) \leq \alpha \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) + \beta \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(g)$. Da für Infima die Ungleichung (7.1.12) umgekehrt gilt, kann man analog auf $\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(\alpha f + \beta g) \geq \alpha \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) + \beta \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(g)$ schließen.

Haben wir nun eine Folge $\mathcal{Z}_n$ von Zerlegungen mit $\delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$ so ergeben beide Abschätzungen zusammen

$$\alpha \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(f) + \beta \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(g) \leq \mathrm{I}_{\mathcal{Z}_n}(\alpha f + \beta g) \leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(\alpha f + \beta g) \leq \alpha \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(f) + \beta \mathrm{I}^{\mathcal{Z}_n}(g)\,.$$

Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f und g erhalten wir dann die Behauptung.

Um die Aussage auch für negative Koeffizienten zu zeigen, reicht es den Fall $\alpha = -1$ und $\beta = 0$ zu betrachten. In diesem Fall folgt die Riemann-Integrierbarkeit aber leicht aus der Identität

$$\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(-f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(-f) = -\mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f) + \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f)\,,$$

wobei wir zweimal die Gleichung (7.1.3) angewendet haben. Das Integral von $-f$ kann ebenfalls mit (7.1.3) bestimmt werden.

ii). Seien $\mathcal{Z}' : x_0, \ldots, x_N$ eine Zerlegung von $[a, c]$ und $\mathcal{Z}'' : y_0, \ldots, y_M$ eine Zerlegung von $[c, b]$. Dann ist $\mathcal{Z} : x_0, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $\delta(\mathcal{Z}) \leq \delta(\mathcal{Z}') + \delta(\mathcal{Z}'')$. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^{\mathcal{Z}'}(f_{|[a,c]}) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}'}(f_{|[a,c]}) &\leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f)\,, \\ \mathrm{I}^{\mathcal{Z}''}(f_{|[c,b]}) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}''}(f_{|[c,b]}) &\leq \mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f)\,. \end{aligned}$$

Durch Betrachten von Folgen $(\mathcal{Z}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathcal{Z}''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta(\mathcal{Z}'_n) \to 0$ und $\delta(\mathcal{Z}''_n) \to 0$ ergibt sich dann die Riemann-Integrierbarkeit von $f_{|[a,c]}$ und $f_{|[c,b]}$.

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so setzen wir im folgenden

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$$

und

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Das Riemann-Integral erfüllt außerdem einige Ungleichungen, die im folgenden Satz dargestellt werden.

Theorem 7.1.8

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:

*i). **Beschränktheit:***

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)\,.$$

*ii). **Monotonie:** Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ so folgt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

*iii). **Vergleich mit Supremums-Norm:** Die Funktion $|f|$ ist Riemann-integrierbar und es gilt:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq (b-a) \cdot \|f\|_\infty\,.$$

Haben wir eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, die *gleichmäßig* gegen eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, so gilt mit *iii)* aus Satz 7.1.8

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq (b-a) \cdot \|f_n - f\|_\infty \to 0\,.$$

i). Durch Betrachten der trivialen Zerlegung $\mathcal{Z} : a, b$ folgt dies sofort aus (7.1.9).

ii). Wir definieren $h(x) := g(x) - f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt $\inf_{x \in [a,b]} h(x) \geq 0$, und mit *i)* erhalten wir

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) - f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Die Linearität des Riemann-Integrals ergibt dann die Behauptung.

iii). Wir setzen $f^+ := \max\{0, f\}$ und $f^- := -\min\{0, f\} = \max\{0, -f\}$. Es gilt dann $|f| = f^+ + f^-$ und damit muss für die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$ nur die von f^+ überprüft werden. Sei dazu $\mathcal{Z} : x_0, \ldots, x_N$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir betrachten dann ein Teil-Intervall $[x_{k-1}, x_k]$.

$$\sup_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f^+(\xi) - \inf_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f^+(\xi) = 0 \leq \sup_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi) - \inf_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi)$$

Gibt es umgekehrt ein $\xi^* \in [x_{k-1}, x_k]$ mit $f(\xi^*) > 0$, so folgt

$$\sup_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f^+(\xi) = \sup_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi)$$

und wegen $f \leq f^+$ damit auch wieder

$$\sup_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f^+(\xi) - \inf_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f^+(\xi) \leq \sup_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi) - \inf_{\xi\in[x_{k-1},x_k]} f(\xi)\,.$$

Die Definitionen der Unter- und Obersummen impliziert dann

$$\left|\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f^+) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f^+)\right| \leq \left|\mathrm{I}^{\mathcal{Z}}(f) - \mathrm{I}_{\mathcal{Z}}(f)\right| .$$

Mit der üblichen Argumentation sehen wir dann, dass f^+ Riemann-integrierbar ist.

Die erste Ungleichung folgt nun aus *ii)* durch Betrachten von $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$. Die zweite Ungleichung folgt aus *i)* angewendet auf $|f|$.

Section 7.2
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist $v(t)$ die Geschwindigkeit eines Objektes zur Zeit t so beschreibt

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} v(t')\,\mathrm{d}t'$$

die seit dem Zeitpunkt t_0 zurückgelegte Strecke. Die Ableitung s' von s sollte wieder die Geschwindigkeit ergeben. Der folgende, als Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bekannte Satz zeigt diesen Sachverhalt in allgemeiner Form.

Theorem 7.2.1

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die durch

$$F(x) := \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad x \in [a, b]$$

definierte Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x)\,, \qquad x \in (a, b).$$

Sei $x \in (a, b)$. Wegen der Sätze 7.1.7 und 7.1.8 gilt dann für $h > 0$ mit $x + h \leq b$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \max_{t \in [x, x+h]} f(t) = f(x_h^*)$$

und ebenso

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geq \min_{t \in [x, x+h]} f(t) = f(x_{*,h}),$$

wobei $x_h^*, x_{*,h} \in [x, x+h]$ gemäß Satz 5.2.8 gewählt worden sind. Für $h \to 0$ haben wir dann $x_h^*, x_{*,h} \to x$ und die Stetigkeit von f ergibt dann

$$f(x_h^*), f(x_{*,h}) \to f(x).$$

Damit folgt die rechtsseitige Differenzierbarkeit von F mit rechtsseitiger Ableitung $f(x)$. Analog ergibt sich die linksseitige Differenzierbarkeit und somit die behauptete Differenzierbarkeit mit $F' = f$.

Die noch zu beweisende Stetigkeit in a und b kann ebenfalls analog gezeigt werden.

Das folgende Korollar ist als Mittelwertsatz der Integralrechnung bekannt.

Korollar 7.2.2

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(x_0)\,.$$

Wir betrachten die in Satz 7.2.1 definierte Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Diese ist stetig und differenzierbar mit $F' = f$, und damit gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, siehe Satz 6.2.3, ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f(x_0) = F'(x_0) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ein einfaches Umstellen ergibt dann die Behauptung.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung motiviert die folgende Definition.

Definition 7.2.3

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt jede stetige und differenzierbar Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ **Stammfunktion** von f.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zeigt, dass es zu jeder stetigen Funktion mindestens eine Stammfunktion gibt und dass diese durch Integration bestimmt werden kann.

Haben wir eine Stammfunktion F zu einer gegebenen Funktion f, so ist für $c \in \mathbb{R}$ ist wegen $(F + c)' = F' = f$ die Funktion $F + c$ wiederum eine Stammfunktion von f. Insbesondere hat jede stetige Funktion unendlich viele Stammfunktionen.

Der folgende Satz zeigt, dass es keine weiteren Stammfunktionen gibt.

Theorem 7.2.4

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F_1 und F_2 Stammfunktionen von f. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1 = F_2 + c$.

Wir betrachten die Funktion $h := F_1 - F_2$. Diese ist stetig und es gilt $h'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Damit gibt es nach Korollar 6.2.5 ein $c \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = c$ für alle $x \in (a, b)$. Da h stetig ist gilt dann auch $h(a) = h(b) = c$. Dies ergibt die Behauptung.

Das folgende Korollar zeigt, dass zur Berechnung von Integralen eine Stammfunktion ausreicht.

Korollar 7.2.5

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis.

Sei F_0 die im Hauptsatz 7.2.1 konstruierte Stammfunktion von f. Nach Konstruktion erfüllt F_0 die behauptete Formel. Nach Satz 7.2.4 gibt es dann ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F_0 = F + c$ und dies ergibt $F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a)$. □

Wir bezeichnen mit dem **unbestimmten Integral**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

die Menge aller Stammfunktionen der stetigen Funktion f. Es gilt also (etwas informell geschrieben)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

mit einer beliebigen Konstanten c genau dann, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle x gilt.

Ist schließlich F eine Stammfunktion von f, so schreiben wir auch

$$F\Big|_a^b := F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

WICHTIGE STAMMFUNKTIONEN

Beispiele zu unbestimmten Integralen ergeben sich aus den schon hergeleiteten Ableitungen. Wir führen diese nachfolgend auf:

$$
\begin{aligned}
\int x^n \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c\,, && n \in \mathbb{N}_0 \\
\int x^{-1} \,\mathrm{d}x &= \ln|x| + c\,, && x \neq 0 \\
\int x^{-n-1} \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n}x^{-n} + c\,, && n \in \mathbb{N}_0 \\
\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x + c \\
\int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x + c \\
\int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x + c \\
\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x &= \arctan x + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x &= \arcsin x + c = -\arccos x + c\,, && |x| < 1\,.
\end{aligned}
$$

Hierbei soll $x \neq 0$ bedeuten, dass 0 nicht im Integrationsbereich liegt.

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, so gilt mit der Produktregel der Differentialrechnung

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' .$$

Durch Umstellen nach $f \cdot g'$ und anschließende Integration erhalten wir damit das folgende Resultat, das als partielle Integration bekannt ist.

Theorem 7.2.6

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist die Stammfunktion von $f \cdot g'$ durch

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f \cdot g - \int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

gegeben und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x &= f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x . \end{aligned}$$

Durch Betrachten von $f(x) := x$ und $g(x) := \exp(x)$ erhalten wir

$$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x-1)\cdot \mathrm{e}^x \,.$$

Setzen wir $f(x) := \ln x$ und $g(x) := x$ erhalten wir

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int \frac{x}{x} \,\mathrm{d}x = x \ln x - x \,.$$

Aus der Kettenregel der Differentialrechnung folgt wiederum der folgende Satz, der als Substitutionsregel bekannt ist.

Theorem 7.2.7

Sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ *stetig differenzierbar. Dann gilt für alle* $x \in [a, b]$*:*

$$\int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(s) \,\mathrm{d}s \,.$$

Ist F eine Stammfunktion von f, so lässt sich die obige Aussage auch als

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = F(\varphi(x)) \,.$$

schreiben.

BEWEIS

Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt mit der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,.$$

Damit ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ und mit zweimaliger Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F \circ \varphi \Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $x \in (a, b]$. Für $x = a$ ist nichts zu beweisen.

In den folgenden Beispielen sei F immer eine Stammfunktion von f.

Für $\lambda \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt mit $\varphi(t) := \lambda t + c$:

$$\begin{aligned}\int_a^x f(\lambda t + c)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_a^x f(\lambda t + c)\lambda\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a + c}^{\lambda x + c} f(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{F(\lambda x + c) - F(\lambda a + c)}{\lambda}\,.\end{aligned}$$

Durch Betrachten von $\varphi(t) := t^2$ erhalten wir

$$\int tf(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int f(t^2)2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}F(x^2)\,.$$

Für $f(x) := \exp(-x)$ ergibt sich wegen $F(x) = -\exp(-x)$ damit

$$\int t\exp(t^2)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\,.$$

Manchmal ist es aber auch hilfreich, die Substitution für bestimmte, feste f zu betrachten. So gilt beispielsweise für $f(x) := x$:

$$\int_a^x \varphi(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} s\,\mathrm{d}s = \frac{s^2}{2}\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} = \frac{\varphi^2(x) - \varphi^2(a)}{2}\,.$$

Damit ist $\varphi^2/2$ Stammfunktion von $\varphi \cdot \varphi'$. Diese Formeln lassen sich aber auch mit partieller Integration mit $f := g := \varphi$ herleiten.

Für $f(x) := x^{-1}$ ergibt sich wiederum

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} s^{-1}\,\mathrm{d}s = \ln|s|\,\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} \\ = \ln|\varphi(x)| - \ln|\varphi(a)|\,,\end{aligned}$$

wobei 0 nicht im obigen Integrationsbereich der Funktion $s \mapsto s^{-1}$ liegen darf. Insbesondere ist damit $\ln|\varphi(x)|$ eine Stammfunktion von $\frac{\varphi'}{\varphi}$.

Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Veränderlichen können direkt durch Integration gelöst werden. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oder auf einem Teilintervall von $\mathbb{R}$, mit der Eigenschaft, dass $f'(x)$ sich als Produkt einer Funktion von $f(x)$ und einer Funktion von x schreiben lässt. Wir betrachten zwei Beispiele.

Das erste Besipiel ist

$$f'(x) = xf(x)\,.$$

Falls $f(x) \neq 0$ gilt, kann man die Gleichung umformen und erhält

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x$$

und damit nach Integration beider Seiten und Anwenden der Substitutionsregel

$$\ln|f(x)| = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$$

und damit

$$f(x) = c\mathrm{e}^{x^2/2}$$

mit einer Konstanten $c \neq 0$. Daneben gibt es noch die konstante Lösung $f(x) = 0$, die wir am Anfang ausgeschlossen haben.

Section 7.3
Partialbruch-Zerlegung

In diesem Abschnitt wollen wir rationale Funktionen, d.h. Funktionen der Form

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}\,, \tag{7.3.1}$$

wobei p und q Polynome sind, integrieren. Grundlegend für unsere weitere Annahme ist dabei, dass wir q in seine linearen und quadratischen Faktoren wie in Abschnitt 162 beschrieben zerlegen können. Mit anderen Worten sind alle reellen und komplexen Nullstellen von q bekannt. Außerdem nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\deg q > 0$ gilt, da im Fall $\deg q = 0$ der Nenner eine Konstante ist und das Integrieren damit trivial ist.

Gilt nun $\deg p \geq \deg q$, so gibt es mit Hilfe der Polynomdivision, siehe Satz 2.7.3, Polynome r und s mit

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x)\,, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

sowie $\deg s = \deg p - \deg q$ und $\deg r < \deg q$. Damit lässt sich f schreiben als

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{s(x)q(x) + r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\,.$$

Die Integration des Polynoms s ist dann eine einfache Übung und es bleibt die Integration der rationalen Funktion

$$g(x) := \frac{r(x)}{q(x)}$$

übrig. Für diese gilt $\deg r < \deg q$ und daher können wir von vornherein $\deg p < \deg q$ in (7.3.1) annehmen.

BEISPIEL

Bevor wir in unseren allgemeinen Betrachtungen weitergehen, wollen wir uns nun zunächst ein Beispiel anschauen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f(x) := \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)}\,, \qquad\qquad x \neq \pm 1.$$

Unser Ansatz ist es nun $a, b \in \mathbb{R}$ zu finden mit

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} &= \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x+b-a}{(x-1)\cdot(x+1)}\,.\end{aligned}$$

Damit muss also $x = (a+b)x + b - a$ für alle $x \neq \pm 1$ gelten, und dies impliziert $1 = a + b$ und $0 = a - b$. Lösen dieser beiden Gleichungen ergibt zunächst $a = b$ und damit $1 = 2a$, d.h. $a = b = 1/2$. Die resultierenden Brüche

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

lassen sich nun leicht integrieren, so ist beispielsweise $\ln|x-1|$ eine Stammfunktion von $(x-1)^{-1}$. Insgesamt erhalten wir auf diese Weise

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

KÜRZEN DER BRÜCHE

Es ist leicht zu sehen, dass unser Ansatz im obigen Beispiel auch dann noch funktioniert, wenn das Zähler-Polynom von der allgemeinen Form $p(x) = mx + c$ ist. Wie sieht es aber mit komplizierteren rationalen Funktionen aus, bei Nullstellen mehrfach auftreten können und auch im Komplexen liegen können?

Dazu erinnern wir uns zunächst daran, dass reelle Polynome in endlich viele lineare und quadratische Faktoren zerfallen, siehe Abschnitt 162. Haben nun p und q einen gemeinsamen solchen Faktor h, d.h. es gibt Polynome $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ mit $p(x) = h(x) \cdot \tilde{p}(x)$ und $q(x) = h(x) \cdot \tilde{q}(x)$, so gilt

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{h(x) \cdot \tilde{p}(x)}{h(x) \cdot \tilde{q}(x)} = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} \,.$$

Ferner gilt mit der Polynomdivision aus Satz 2.7.3, dass $\mathbf{deg}\, h + \mathbf{deg}\, \tilde{p} = \mathbf{deg}\, p$ und $\mathbf{deg}\, h + \mathbf{deg}\, \tilde{q} = \mathbf{deg}\, q$. Damit folgt $\mathbf{deg}\, \tilde{p} < \mathbf{deg}\, \tilde{q}$.

Falls $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ weitere gemeinsame Faktoren haben, so lässt sich dieses Kürzen solange wiederholen, bis es keine weiteren gemeinsamen Faktoren gibt. Im folgenden können wir daher zusätzlich annehmen, dass p und q in (7.3.1) in **gekürzter Form** vorliegen, d.h. keine gemeinsamen Faktoren haben.

Um diese letzte Annahme umzuformulieren, erinnern wir uns daran, dass die linearen Faktoren von q von der Gestalt $(x - \lambda_j)$ sind, wobei λ_j eine reelle Nullstelle von p ist. Ferner sind die quadratischen Faktoren reelle Polynome vom Grad 2, die die Gestalt

$$Q(x) := (x - \lambda_j) \cdot (x - \overline{\lambda}_j) = (x - \alpha_j - \mathrm{i}\beta_j)(x - \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j) = (x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2$$

haben, wobei $\lambda_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$ und $\overline{\lambda}_j = \alpha_j - \mathrm{i}\beta_j$ zwei komplexe Nullstellen von q sind, siehe auch Lemma 2.7.1.

Da eine analoge Beschreibung auch für p gilt, ist unsere Annahme, dass p und q in gekürzter Form vorliegen, äquivalent zu der Annahme, dass p und q keine gemeinsamen komplexen Nullstellen haben.

Das folgende Lemma zeigt wie man mit Hilfe einer reellen Nullstelle von q die rationale Funktion vereinfachen kann.

Lemma 7.3.1

Seien p und q reelle Polynome mit $\deg p < \deg q$. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von q mit Vielfachheit v, d.h. es gibt ein Polynom r mit $q(x) = (x-\lambda)^v \cdot r(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $r(\lambda) \neq 0$. Wir setzen

$$a := \frac{p(\lambda)}{r(\lambda)}\,.$$

Dann gibt es ein Polynom p_1 mit $\deg p_1 < \deg q - 1$ und

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{(x-\lambda)^v} + \frac{p_1(x)}{(x-\lambda)^{v-1}\cdot r(x)} \tag{7.3.2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$. Ferner kann dieses Polynom p_1 durch

$$p(x) - ar(x) = (x-\lambda)p_1(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{7.3.3}$$

bestimmt werden.

BEWEIS

Wir definieren $s(x) := p(x) - ar(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\deg s \leq \max\{\deg p, \deg r\} < \deg q$ und

$$s(\lambda) = p(\lambda) - \frac{p(\lambda)}{r(\lambda)} \cdot r(\lambda) = 0\,.$$

Damit existiert nach Korollar 2.7.4 ein Polynom p_1 mit $\deg p_1 = \deg s - 1 < \deg q - 1$ mit $s(x) = (x - \lambda) \cdot p_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit anderen Worten erfüllt p_1 die Gleichung (7.3.3). Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a}{(x-\lambda)^v} + \frac{p_1(x)}{(x-\lambda)^{v-1} \cdot r(x)} &= \frac{ar(x)}{(x-\lambda)^v \cdot r(x)} + \frac{(x-\lambda) \cdot p_1(x)}{(x-\lambda)^v \cdot r(x)} \\
&= \frac{ar(x)}{q(x)} + \frac{p(x) - ar(x)}{q(x)} \\
&= \frac{p(x)}{q(x)}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$.

Lemma 7.3.2

Seien p und q reelle Polynome mit $\deg p < \deg q$. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von q mit Vielfachheit w, d.h. es gibt ein reelles Polynom r mit $q(x) = Q^w(x) \cdot r(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $r(\lambda) \neq 0$, wobei wir das reelle quadratische Polynom

$$Q(x) := (x - \lambda) \cdot (x - \overline{\lambda}), \qquad x \in \mathbb{R}$$

betrachten. Wir setzen

$$\gamma := \frac{p(\lambda)}{r(\lambda)}, \qquad b := \frac{\operatorname{Im} \gamma}{\operatorname{Im} \lambda}, \qquad c := -\frac{\operatorname{Im}(\gamma\overline{\lambda})}{\operatorname{Im} \lambda}$$

Dann gibt es ein reelles Polynom p_2 mit $\deg p_2 < \deg q - 2$ und

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{bx + c}{Q^w(x)} + \frac{p_2(x)}{Q^{w-1}(x) \cdot r(x)} \tag{7.3.4}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$. Ferner kann dieses Polynom p_2 durch

$$p(x) - (bx + c)r(x) = Q(x)p_2(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{7.3.5}$$

bestimmt werden.

Wir definieren $s(x) := p(x) - (bx + c)r(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Wegen $\deg r = \deg q - 2$ gilt dann $\deg s \leq \max\{\deg p, 1 + \deg r\} < \deg q$.

Um s durch Q teilen zu können, wollen wir nun zeigen, dass λ und $\overline{\lambda}$ Nullstellen von s sind. Dazu bemerken wir zunächst, dass aus $r(\lambda) \neq 0$ wegen Lemma 2.7.1 auch $r(\overline{\lambda}) \neq 0$ folgt. Außerdem gilt

$$\overline{\gamma} = \frac{\overline{p(\lambda)}}{\overline{r(\lambda)}} = \frac{p(\overline{\lambda})}{r(\overline{\lambda})}, \tag{7.3.6}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass p und r reelle Polynome sind. Ferner gilt

$$b = \frac{2\mathrm{i} \cdot \operatorname{Im} \gamma}{2\mathrm{i} \cdot \operatorname{Im} \lambda} = \frac{\gamma - \overline{\gamma}}{\lambda - \overline{\lambda}}$$

und

$$c = -\frac{2\mathrm{i} \cdot \operatorname{Im}(\gamma\overline{\lambda})}{2\mathrm{i} \cdot \operatorname{Im} \lambda} = -\frac{\gamma\overline{\lambda} - \overline{\gamma\overline{\lambda}}}{\lambda - \overline{\lambda}} = \frac{\overline{\gamma}\lambda - \gamma\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}}.$$

Damit gilt

$$s(\lambda) = p(\lambda) - (b\lambda + c)r(\lambda) = r(\lambda)\big(\gamma - b\lambda - c\big)$$

und wegen

Analog folgt aus (7.3.6)

$$s(\overline{\lambda}) = p(\overline{\lambda}) - (b\overline{\lambda} + c)r(\overline{\lambda}) = r(\overline{\lambda})\big(\overline{\gamma} - b\overline{\lambda} - c\big)$$

und wegen

$$\overline{\gamma} - b\overline{\lambda} - c = \frac{\overline{\gamma}(\lambda - \overline{\lambda})}{\lambda - \overline{\lambda}} - \frac{(\gamma - \overline{\gamma}) \cdot \overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}} - \frac{\overline{\gamma}\lambda - \gamma\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}} = 0$$

folgt auch $s(\overline{\lambda}) = 0$. Damit gibt es, wie im Abschnitt 162 ausgeführt, ein reelles Polynom p_2 mit $\deg p_2 = \deg s - 2 < \deg q - 2$ und

$$s(x) = (x - \lambda)(x - \overline{\lambda}) \cdot p_2(x) = Q(x)p_2(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mit anderen Worten erfüllt p_2 die Gleichung (7.3.5). Damit folgt aber auch

$$\begin{aligned} \frac{bx + c}{Q^w(x)} + \frac{p_2(x)}{Q^{w-1}(x) \cdot r(x)} &= \frac{(bx + c) \cdot r(x)}{Q^w(x) \cdot r(x)} + \frac{Q(x) \cdot p_2(x)}{Q^w(x) \cdot r(x)} \\ &= \frac{(bx + c) \cdot r(x)}{q(x)} + \frac{p(x) - (bx + c)r(x)}{q(x)} \\ &= \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$.

Wendet man die Lemmata 7.3.1 und 7.3.2 nacheinander auf alle reellen und komplexen Nullstellen von q an, so ergibt sich die folgende Vereinfachung von (7.3.1).

Theorem 7.3.3

Seien p und q Polynome mit $\deg p < \deg q$. Ferner seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die reellen Nullstellen von q mit Vielfachheiten $v_1, \ldots, v_n$ und $Q_1, \ldots, Q_m$ die quadratischen Faktoren von q mit Vielfachheiten $w_1, \ldots, w_m$. Dann gibt es Konstanten $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j} \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{a_{i,j}}{(x - \lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{w_i} \frac{b_{i,j}x + c_{i,j}}{Q_i^j(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$.

Zunächst betrachten wir nochmal die Funktion

$$f(x) := \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)}\,, \qquad\qquad x \neq \pm 1.$$

Dann ist $\lambda := 1$ eine einfache Nullstelle des Nenner-Polynoms $q(x) := x^2 - 1$. Setzen wir entsprechend $r(x) := x + 1$, so ist

$$a = \frac{p(1)}{r(1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,,$$

wobei $p(x) := x$ das Zähler-Polynom ist. Um p_1 aus Lemma 7.3.1 zu bestimmen, betrachten wir nun (7.3.3):

$$p(x) - ar(x) = x - \frac{1}{2}\cdot(x+1) = \frac{1}{2}\cdot(x-1) = \frac{1}{2}\cdot(x-\lambda)\,.$$

Damit ist $p_1 = \frac{1}{2}$ und (7.3.2) liefert mit $v = 1$ und $\lambda = 1$ die schon bekannte Zerlegung

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

BEISPIEL

Ein etwas komplizierteres und vollständiges Beispiel ist durch die Funktion

$$f(x) := \frac{x^5 + x^2 + x + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

gegeben. Da das Zähler-Polynom noch keinen kleineren Grad als das Nenner-Polynom hat, führen wir zunächst Polynom-Division durch. Dies ergibt

$$f(x) = x + 2 + \frac{2x^3 - x^2 + 4x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\,.$$

Nun zerlegen wir das Nenner-Polynom in seine Faktoren

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1)\,.$$

Aus unserem allgemeinen Satz 7.3.3 wissen wir dann, dass es $a_1, a_2, b, c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{2x^3 - x^2 + 4x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{a_1}{(x-1)^2} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} \tag{7.3.7}$$

BEISPIEL

Diese Konstanten können wir zum Beispiel durch iteratives Anwenden von Lemma 7.3.1 bzw. Lemma 7.3.2 bestimmen. Zur Bestimmung von a_1 setzen wir $r(x) = x^2 + 1$. Für die Nullstelle $\lambda = 1$ ergibt dies

$$a_1 = \frac{p(1)}{r(1)} = \frac{2 \cdot 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - 1}{1^2 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

und mit (7.3.3) sehen wir

$$\begin{aligned} p(x) - a_1 r(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1 - 2(x^2 + 1) &= 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \\ &= (x-1) \cdot (2x^2 - x + 3)\,, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt Polynomdivision benutzt wurde. Damit ist $p_1(x) := 2x^2 - x + 3$ und Lemma 7.3.1 ergibt

$$\frac{2x^3 - x^2 + 4x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2x^2 - x + 3}{(x-1)(x^2+1)}\,.$$

Um a_2 zu bestimmen, betrachten wir den zweiten Bruch mit Hilfe von Lemma 7.3.1. Dies ergibt

$$a_2 = \frac{p_1(1)}{r(1)} = \frac{2 \cdot 1^2 - 1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Mit (7.3.3) sehen wir ferner

Damit ist $p_2 = -1$ und Lemma 7.3.1 ergibt

$$\frac{2x^2 - x + 3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x^2+1}\,.$$

Insgesamt haben wir damit $a_1 = a_2 = 2$, $b = 0$ und $c = -1$ erhalten, d.h.

$$\frac{2x^3 - x^2 + 4x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}$$

für alle $x \neq 1$.

Alternativ können wir die Form (7.3.7) auch direkt ausnutzen, um die Konstanten zu bestimmen. Addieren wir nämlich die 3 Brüche auf der rechten Seite und vergleichen den resultierenden Zähler mit p, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&2x^3 - x^2 + 4x - 1 \\
&\quad = a_1 \cdot (x^2 + 1) + a_2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1) + (bx + c) \cdot (x - 1)^2 \\
&\quad = a_1 \cdot (x^2 + 1) + a_2 \cdot (x^3 - x^2 + x - 1) + b(x^3 - 2x^2 + x) + c \cdot (x^2 - 2x + 1) \\
&\quad = (a_2 + b)x^3 + (a_1 - a_2 - 2b + c)x^2 + (a_2 + b - 2c)x + a_1 - a_2 + c\,.
\end{aligned}$$

Das Vergleichen der Koeffizienten ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
2 &= a_2 + b \\
-1 &= a_1 - a_2 - 2b + c \\
4 &= a_2 + b - 2c \\
-1 &= a_1 - a_2 + c\,.
\end{aligned}$$

Diese muss dann noch gelöst werden, was wir an dieser Stelle überspringen, da es einfach zu sehen ist, dass die obigen Koeffizienten $a_1 = a_2 = 2$, $b = 0$ und $c = -1$ das Gleichungssystem lösen.

Dieser Ansatz kann übrigens etwas vereinfacht werden, wenn man zunächst die reellen Nullstellen einsetzt. In obigen Fall wäre dies $x = 1$, wodurch unser obiger Zählervergleich sich auf

$$4 = 2 - 1 + 4 - 1 = a_1(1^2 + 1) + a_2 \cdot 0 + (bx + c) \cdot 0 = 2a_1$$

reduziert. Damit haben wir $a_1 = 2$ und das Gleichungssystem in 4 Variablen reduziert sich auf eins in 3 Variablen. Analog kann man dann auch die beiden komplexen Nullstellen $\pm\mathrm{i}$ einsetzen, um ein Gleichungssystem in b und c zu bekommen.

Zum Abschluss dieses Abschnittes listen wir die Formeln auf, die uns beim integrieren rationaler Funktionen helfen werden. Statt einer Darstellung als komplexer Partialbrüche bietet sich mitunter eine reelle Form an, wir geben den wichtigsten Fall dazu ebenfalls an. Es gilt für $v > 1$ und $Q > P^2$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-\lambda}\,\mathrm{d}x &= \ln|x-\lambda| + C\,, && x \neq \lambda\,,\\
\int \frac{1}{(x-\lambda)^v}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-v+1}\cdot\frac{1}{(x-\lambda)^{v-1}} + C\,, && x \neq \lambda\,,\\
\int \frac{1}{x^2+2Px+Q}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{Q-P^2}}\arctan\frac{x+P}{\sqrt{Q-P^2}} + C\,,\\
\int \frac{x+P}{x^2+2Px+Q}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2Px+Q) + C\,.
\end{aligned}$$

Um die letzten beiden Formel anzuwenden, müssen wir dann lediglich noch

$$\frac{bx+c}{x^2+2Px+Q} = b\cdot\frac{x+P}{x^2+2Px+Q} + (c-bP)\cdot\frac{1}{x^2+2Px+Q}$$

beachten. Die Integration von höheren Potenzen von quadratischen Polynomen im Nenner ist ebenfalls möglich. Hier wird zunächst partielle Integration benutzt, um sukzessive die Potenz zu verringern. Wir verzichten auf die recht technischen Details.

Section 7.4
Uneigentliche Integrale

Im folgenden sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Wir wollen nun untersuchen, wann wir für f auch ein Integral über I definieren können. Dazu sagen wir, dass f **lokal Riemann-integrierbar** ist, falls f auf jedem abgeschlossenen Teil-Intervall von I Riemann-integrierbar ist.

Ist nun z.B. $I = [a, b)$ und $f : I \to \mathbb{R}$ lokal Riemann-integrierbar, dann sagen wir, dass f **uneigentlich Riemann-integrierbar** ist, falls der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. In diesem Fall heißt das Integral auf der linken Seite **uneigentliches Riemann-Integral**. Im Fall $I = [a, \infty)$ definieren wir analog

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r \to \infty} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

falls der Grenzwert existiert, und die obigen Sprechweisen bleiben die gleichen. Halboffene Intervalle der Form $(a, b]$ und $(-\infty, b]$ werden ebenfalls analog betrachtet.

Offene Intervalle $I := (a, b)$ werden dadurch behandelt, dass man ein $c \in I$ fixiert und die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit auf $(a, c]$ und $[c, b)$ fordert. Das uneigentliche Integral ist dann

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dieser Ansatz ist unabhängig von der Wahl von c, wie man sich leicht mit Satz 7.1.7 überlegen kann. Im Fall $I := (-\infty, \infty)$ ist der Ansatz analog.

Es gilt zum Beispiel

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1} - \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

und

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \frac{-1}{r} - \frac{-1}{1} = 1$$

Die Konvergenz uneigentlicher Integrale ist stets nachzuweisen. Oft hilft dazu das folgende Vergleichskriterium, dass vom Charakter sehr ähnlich zum dem Majoranten-Kriterium für Reihen ist.

Theorem 7.4.1

Seien $I := [a, b)$ *ein halboffenes Intervall mit* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *und* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *lokal Riemann-integrierbar mit* $|f(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in I$*. Ist dann* g *uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist auch* f *uneigentlich Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für die anderen Fälle, in denen uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit definiert ist.

Wir betrachten hier nur den Fall $I := [a, b)$ mit $b < \infty$. Sei dazu $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b)$ eine Folge mit $b_n \to b$. Wir setzen

$$\alpha_n := \int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \gamma_n := \int_a^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dann konvergiert die Folge $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung und damit ist sie auch eine Cauchy-Folge. Für $m, n \geq 1$ mit $b_m \leq b_n$ gilt ferner

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \left|\int_{b_m}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{b_m}^{b_n} \left|f(x)\right|\mathrm{d}x \leq \int_{b_m}^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x = |\gamma_n - \gamma_m|\,,$$

siehe Satz 7.1.7 und Satz 7.1.8. Damit ist auch $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

Typische Vergleichsfunktionen sind $g(x) := x^\alpha$. Für $\alpha > -1$ gilt hierbei

$$\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1} \tag{7.4.1}$$

und dies sind auch die einzigen α, für die Funktion g auf $(0,1]$ uneigentlich integrierbar ist. Analog gilt für $\alpha < -1$

$$\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1} = -\frac{1}{\alpha+1} \tag{7.4.2}$$

und dies sind wiederum die einzigen α, für die Funktion g auf $[1,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist.

Eine Anwendung des zweiten Falls zeigt sofort, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$$

für alle $\alpha > 1$ existiert.

Theorem 7.4.2

Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *eine stetige und monoton fallende Funktion. Dann gilt für alle* $n \geq 1$*:*

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)\,. \tag{7.4.3}$$

Insbesondere ist f *uneigentlich Riemann-integrierbar genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ *konvergiert.*

Satz 7.4.2 kann auch mit dem Majoranten-Kriterium aus Satz 4.2.6, bzw. der Monotonie des Integrals, siehe Satz 7.1.8, verbunden werden.

Betrachtet man die Funktion $f(x) := x^{-1}$, so ergibt sich für die harmonische Reihe

$$\sum_{k=2}^{n} k^{-1} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}\,.$$

Die Folge der harmonischen Partialsummen wächst daher so schnell wie der natürliche Logarithmus.

BEWEIS

Für $x \in [k, k+1]$ gilt $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Damit folgt

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k)\,. \tag{7.4.4}$$

Summation über $k = 1, \ldots, n-1$ liefert dann die zwei Ungleichungen. Da alle drei Ausdrücke in diesen zwei Ungleichungen monoton wachsend in n sind, ist die Konvergenz der zugehörigen drei Folgen äquivalent zu ihrer Beschränktheit, siehe die Sätze 4.1.6 und 4.1.16.

Die Ungleichungen (7.4.4) können auch zur Abschätzung von Reihen-Resten dienen. Für $\alpha > 1$ gilt beispielsweise

$$\int_k^{k+1} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_k^{k+1} = \frac{k^{-\alpha+1} - (k+1)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1}$$

Wird dies für $f(x) := x^{-\alpha}$ mit (7.4.4) verbunden, so ergibt eine anschließende Summation über $k = n, \ldots, \infty$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha} = \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)^{-\alpha} \leq \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leq \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha} .$$

Umstellen ergibt für $n \geq 2$:

$$\frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leq \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha} \leq \frac{(n-1)^{-\alpha+1}}{\alpha-1} .$$

Man beachte ferner, dass für $n \geq 2$ gilt

$$\frac{(n-1)^{-\alpha+1}}{\alpha-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-\alpha+1} \cdot \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leq 2^{-\alpha+1} \cdot \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1} .$$

Die Tails der Reihe über $k^{-\alpha}$ fallen daher so schnell wie die Folge $n^{-\alpha+1}$.

Als ein weiteres Beispiel für uneigentliche Integrale betrachten wir die Funktion $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ für $x > 0$ und $f(0) := 1$. Diese Funktion ist stetig, da

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1\,.$$

Wir wollen nun sogenannte **Dirichlet-Integral**

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{7.4.5}$$

untersuchen. Dazu bemerken wir zunächst, dass für $z_1 < z_2$ partielle Integration

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\cdot(-\cos x)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{-1}{x^{-2}}\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x\,.$$

ergibt. Damit erhalten wir

$$\left|\int_1^r \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\frac{1}{r}\cdot(-\cos r) - \frac{1}{1}\cdot(-\cos 1)\right| + \int_1^r \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{r} + 1 + \int_1^r x^{-2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Der letzte Ausdruck ist beschränkt für $r \to \infty$ und damit existiert das uneigentliche Riemann-Integral (7.4.5).

Die Funktion $|f|$ ist jedoch nicht uneigentlich Riemann-integrierbar. So gilt für $k \geq 1$:

$$\int_{2k\cdot\pi}^{(2k+1)\cdot\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \frac{1}{(2k+1)\pi} \cdot \int_{2k\cdot\pi}^{(2k+1)\cdot\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{(2k+1)\pi} \,.$$

Damit folgt

$$\int_{2\pi}^{(2n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{2k\cdot\pi}^{(2k+1)\cdot\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

und dies zeigt, dass

$$\int_{0}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x = \infty \,.$$

Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \tag{7.4.6}$$

definiert. Wir wollen hier zeigen, dass das zugrunde liegende, uneigentliche Integral für jedes $x \in (0,\infty)$ existiert. Dazu betrachten wir zunächst

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

und da das rechte, uneigentliche Integral wegen $x-1 > -1$ existiert, siehe (7.4.1) existiert auch das linke, uneigentliche Integral nach Satz 7.4.1. Ferner gilt $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x+1} = 0$, wie eine $\lfloor x+1 \rfloor$-malige Anwendung der Regel von l'Hospital zeigt. Damit gibt es ein $t_0 \ge 1$ mit

$$\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \le t^{-2}$$

für alle $t \ge t_0$. Dies ergibt

$$\int_{t_0}^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \le \int_{t_0}^\infty t^{-2}\,\mathrm{d}t\,,$$

und da das rechte, uneigentliche Integral wegen $x-1 > -1$ existiert, siehe (7.4.2) existiert auch das linke, uneigentliche Integral nach Satz 7.4.1. Da die Integration auf dem verbliebenen Intervall $[1, t_0]$ kein Problem darstellt

Mit partieller Integration kann man ferner zeigen, dass

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)\,, \qquad\qquad x > 0$$

gilt. Da offensichtlich $\Gamma(x) = 1$ gilt, folgt mit Induktion

$$\Gamma(n+1) = n!$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.