A. Logioti
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

I. Steinwart

Wintersemester 2022/23

Vortragsübungsblatt 2

Aufgabe V5. *Umkehrfunktion*

Geben Sie Mengen A und B an, so dass $f: A \to B$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

bijektiv ist und weisen Sie für diese Wahl der Mengen jeweils die Injektivität und die Surjektivität nach. Geben Sie eine Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe V6. *Vollständige Induktion: Summen*

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

(c) Verwenden Sie **(b)**, um einen alternativen Beweis für die Aussage in **(a)** zu liefern.

Aufgabe V7. *Vollständige Induktion: andere typische Aufgaben*

Beweisen Sie jeweils mit vollständiger Induktion:

(a) Für $x \geqq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geqq 1 + nx$ (*Bernoullische Ungleichung*).

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

(c) Sei $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung von f gegeben durch $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.