A. Logioti
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

I. Steinwart

Wintersemester 2022/23

Vortragsübungsblatt 3

Aufgabe V8. *Mächtigkeit der Potenzmenge endlicher Mengen*

In der Vorlesung haben Sie mit Hilfe vollständiger Induktion gezeigt, dass die Potenzmenge einer endlichen Menge A mit $|A| = n \in \mathbb{N}$ genau 2^n Elemente besitzt. Zeigen Sie diese Tatsache mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes, indem Sie ausnutzen, dass der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten angibt, k Elemente aus einer Sammlung von n Elementen auszuwählen.

Aufgabe V9. *Mächtigkeit von unendlichen Mengen, Abzählbarkeit*

Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt. Eine Menge B heißt *mächtiger* als eine Menge A, wenn es eine injektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt, aber keine bijektive Abbildung. Eine Menge A heißt *abzählbar*, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Eine Menge A heißt *überabzählbar*, wenn sie mächtiger als $\mathbb{N}$ ist.

(a) Sei $A \neq \emptyset$ irgendeine Menge. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ immer mächtiger als A ist.

(b) Sei N abzählbar. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von N endlich oder abzählbar ist.

(c) Seien N_1 und N_2 abzählbar. Zeigen Sie, dass dann $N_1 \cup N_2$ abzählbar ist.

(d) Seien N_1 und N_2 abzählbar. Zeigen Sie, dass dann $N_1 \times N_2$ abzählbar ist.

Aufgabe V10. *Mächtigkeit wichtiger Zahlenmengen*

Sind $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ abzählbar oder überabzählbar?