A. Logioti
F. Schewe
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

Wintersemester 2022/23

I. Steinwart

Vortragsübungsblatt 7

Aufgabe V 20. *Quotientenkriterium für Folgen*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Quotienten

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Zeigen Sie: Falls $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $q \geq 0$ konvergiert, so gilt:

(a) $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ im Fall $q \in [0,1)$,

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt im Fall $q > 1$,

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann sowohl konvergieren als auch divergieren für $q = 1$.

Aufgabe V 21. *Grenzwerte*

Untersuchen Sie die nachstehenden Zahlenfolgen für $n \to \infty$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

a) $\dfrac{9n^3 - 17\sqrt{n}^7}{20 + 3n^3}$, **b)** $\dfrac{(-4)^n n^2}{7n^2 + \sin(n)}$, **c)** $\dfrac{n^2(-2)^n + n^7}{3^n + n^3}$,

d) $((n + n^{3/4})^{1/2} + 2)^{1/2} - n^{1/4}$, **e)** $\sqrt[n]{4^n + 7^n}$, **f)** $\sqrt[n]{4n^3 + \dfrac{1}{2^n}}$,

g) $\dfrac{n!}{n^n}$, **h)** $\dfrac{3^n n!}{n^n}$, **i)** $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Aufgabe V 22. *Aussagen zu Folgenkonvergenz*

Gegeben seien zwei reellwertige Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so konvergiert $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann wenn auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $b \neq 0$ und $a_n \cdot a_{n+1} \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(c) Ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert entweder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.