A. Logioti
F. Schewe
D. Zimmermann

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

I. Steinwart

Wintersemester 2022/23

Vortragsübungsblatt 8

Aufgabe V 23. *Exponentialfolge*

(a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls Ihren Grenzwert:

$$\textbf{(i)}\ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n-2}, \quad \textbf{(ii)}\ a_n = \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{n}, \quad \textbf{(iii)}\ a_n = \left(-1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}.$$

(b) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe V 24. *Verdichtungssatz von Cauchy*

(a) Zeigen Sie den Verdichtungssatz von Cauchy:
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann wenn $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie mithilfe von **(a)**, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann wenn $\alpha > 1$ ist.

Aufgabe V 25. *Reihenkonvergenz*

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n^2+n}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4 2^n}{(4+(-1)^n)^n}$, **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^{\alpha n}},\ \alpha\in\mathbb{R}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}$, **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$, **(f)** $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln(n!))^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$.